

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

E. CHWALLA-GRAZ • K. FEDERHOFER-GRAZ • P. FUNK-WIEN
W. GAUSTER-RALEIGH, USA. • K. GIRKMANN-WIEN • G. HEINRICH-WIEN
A. KROMM-GRAZ • E. MELAN-WIEN • H. MELAN-WIEN • H. PARKUS-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

H. PARKUS-WIEN

BAND XIII, HEFT 1

MIT 12 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN 15. MAI 1959)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1959

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind
an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5
Tel. 63 96 14, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in mindestens einer dieser drei Sprachen vorangestellt werden, die vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen, mitzuliefern ist.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10 % der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind: der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

Band XIII, Heft 1

Inhaltsverzeichnis

Seite

Originalarbeiten

- J. Kučera, Geometrische Räume in der Theorie der elektrischen Maschinen. (Mit 2 Textabbildungen.) 1
- A. Huber, Zur Berechnung des Kreuzstrom-Rekuperators. (Mit 5 Textabbildungen.) 12
- W. Peschka, Beitrag zu den Wirbelsätzen der Magneto hydrodynamik. (Mit 1 Textabbildung.) 17
- E. Tschsch, Die Membranspannungen in Kegelschalen. (Mit 3 Textabbildungen.) 23
- M. Z. v. Krzywoblocki, On the linearized mathematical representation of the flow in axial compressors. (With 1 Figure.) 27

Buchbesprechungen 50

Zurmühl, R., Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker (E. Bukovics). — Rothstein, J., Communication, Organization and Science (N. Thumb). — Jaeger, J. C., Elasticity, Fracture and Flow (H. Parkus). — Schulz, F., und K. H. Fasol, Wasserstrahlpumpen zur Förderung von Flüssigkeiten (R. Bruniak). — Sauer, R., Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, 2. Aufl. (H. Hornich). — Graeb, W., Lineare Algebra (W. Knödel). — Lappe, R., Stromrichter (H. von Berteles). — Kübler, E., Moeller-Werr: Leitfaden der Elektrotechnik, Bd. II, Teil 3 (H. von Berteles). — Richter, H., Rohrhydraulik, 3. Aufl. (R. Bruniak). — Szabó, I., Höhere Technische Mechanik (H. Parkus). — Zucrow, M. J., Aircraft and Missile Propulsion (W. Peschka). — Herausgegeben von Görtler, H., Grenzschichtforschung — Boundary Layer Research (R. Bruniak). — Kaplan, W., Ordinary Differential Equation (E. Bukovics).

Berichte

- X. Internationaler Kongreß für angewandte Mechanik 56

Magnifizenz Prof. Dr. Franz Magyar, der Schriftleiter des Österreichischen Ingenieur-Archivs und einer der Mitbegründer dieser Zeitschrift, ist am 4. September 1958 verschieden. Auf Wunsch des Verlages habe ich die Schriftleitung übernommen.

Ich betrachte es als meine vornehmste Pflicht, die Zeitschrift auf der bisherigen Höhe weiterzuführen und bitte hierzu um die Unterstützung durch die Fachkollegen.

H. Parkus

Geometrische Räume in der Theorie der elektrischen Maschinen

Von J. Kučera, Prag

Mit 2 Textabbildungen

Zusammenfassung. Seit Beginn der Entwicklung elektrischer Maschinen läßt sich eine Geometrisierung in der theoretischen Elektrotechnik spüren. In der ersten Zeit spielte der bekannte Gaußsche Raum eine wichtige Rolle. In dieser Epoche wurden fast alle Kreisdiagramme der Wechselstrommaschinen gefunden.

Dann begann man die Tensorrechnung und die bezüglichlichen Räume einzuführen. Für Wechselstromkommutatormaschinen wichtig ist ein quasiholonomer Raum, der sich auch bei einigen anderen Maschinen anwenden läßt, falls man eine gewöhnliche Wechselstromwicklung durch eine Kommutatorwicklung ersetzt. Das betreffende Koordinatensystem ist geradlinig und steht fest. Es lassen sich hier hauptsächlich Probleme bei stetiger Belastung lösen.

Für transiente Erscheinungen entspricht besser ein holonomer Raum. Seine Koordinatenachsen sind beweglich und an die Wicklungsachsen gebunden. Es wird die Impedanz- sowie die Admittanzmatrix einer Maschine ermittelt und auf Grund dieser ein einphasiger Kurzschlußstrom berechnet.

In der Theorie der elektrischen Maschinen ist auch der nichtholonome Raum wichtig. Bei diesem ist das Koordinatensystem drehbar und bewegt sich mit beliebiger Geschwindigkeit. In der Arbeit werden die bekannten Pfaffschen Bedingungen definiert und die Impedanz- und Admittanzmatrix ermittelt. Dann wird das Affinsymbol bestimmt und mittels dieses eine Gleichung der allgemeinen elektrischen Maschine abgeleitet.

I. Einleitung

Wenn man der Entwicklung der Theorie von elektrischen Maschinen seit dem Anfang dieses Jahrhunderts folgt, sieht man eine Tendenz zu deren Geometrisierung. Heute kann man sich z. B. die Theorie der elektrischen Maschinen ohne Vektor- und Kreisdiagramme schwer vorstellen. Der Ursprung von dieser Entwicklung stammt vom berühmten Physiker A. J. Fresnel (1788—1827), der einen Gedanken auffaßte, periodische Erscheinungen mittels drehender Vektoren darzustellen. Diese Erfindung zeigte sich später sehr wichtig, als sich die Theorie der Wechselströme zu entwickeln begann. Bald nach der Erfindung des Asynchronmotors von N. Tesla im Jahre 1888, gelang es im Jahre 1894 A. Heyland sein erstes Kreisdiagramm des Transformators und Asynchronmotors abzuleiten, welches die Wirkungsweise von diesen Maschinen bei Belastung angab. Mittels weiterer Arbeiten in den Jahren 1895 und 1896 wurde von ihm diese Erfindung noch vervollkommen. Zugleich haben auch andere Forscher auf dem Gebiet der Kreisdiagramme gearbeitet, wie z. B. B. A. Behrend, C. P. Steinmetz und später auch G. Ossanna, der eine vollständige Theorie des

Asynchronmotors aufbaute. Ähnlich wurden die Kreisdiagramme anderer Wechselstrommaschinen von A. Blondel, E. Arnold, J. L. La Cour, L. Bragstad, J. Sumec und anderen entwickelt. Im Jahr 1893 ist C. P. Steinmetz auf den Gedanken gekommen, die komplexen Zahlen in die Theorie der Wechselströme einzuführen. Diese Methode wurde später von E. Arnold und seinen Mitarbeitern übernommen, als er sein klassisches Werk „Wechselstrommaschinen“ rund im Jahr 1910 veröffentlichte. Damit wurde die erste Etappe der Entwicklung von der Theorie der elektrischen Maschinen beschlossen.

Nach dem ersten Weltkrieg kam es zum neuen Aufschwung in der Geometrisierung der theoretischen Elektrotechnik. Im Jahr 1923 veröffentlichte J. B. Pomey sein Buch „Principes du calcul vectoriel et tensoriel“, wo er auf die Möglichkeiten der Anwendung der Tensorrechnung in der Elektrotechnik hingewiesen hat. In den Jahren 1935 und den folgenden benutzte diesen Gedanken und dieses Verfahren zur Lösung von verschiedenen Problemen in den elektrischen Maschinen G. Kron, als er eine Reihe von Aufsätzen unter dem Titel „The Applications of Tensors to the Analysis of Rotary Electrical Machinery“ in der General Electric Review veröffentlichte. Dabei zeigte sich auch die Notwendigkeit, die komplexe Geometrie in der Elektrotechnik weiter zu entwickeln. Die Anzahl der in dieser Disziplin angewendeten geometrischen Räume ist angewachsen und neben dem klassischen Gaußschen Raum wurden dort weitere Räume, d. h. quasiholonomer, holonom, unholonom und der Hilbertsche eingeführt.

In den Jahren 1950 und 1952 wurde von mir eine Behandlung¹ über die holonomen Räume in der Elektrotechnik veröffentlicht und es wurde gezeigt, daß die bekannte Gleichung von Lagrange, die in der Mechanik eine wichtige Rolle spielt, auch in der Theorie der elektrischen Maschinen gültig ist:

$$u_k = R_{kj} \dot{v}^j + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{v}^k} - \frac{\partial T}{\partial v^k} \quad (1)$$

Das erste Glied an der rechten Seite stellt eine Dissipationskomponente dar, das den ohmschen Spannungsabfällen entspricht. Diese Gleichung läßt sich vereinfachen, indem man schreibt

$$u_k = R_{kj} \dot{v}^j + L_{kl} \frac{Dv^l}{Dt}, \quad (2)$$

was die einfachste Art der Gleichung einer allgemeinen elektrischen Maschine darstellt. $\frac{Dv^l}{Dt}$ ist die absolute Ableitung nach der Zeit t und man kann sie auch schreiben:

$$\frac{Dv^l}{Dt} = \frac{Dv^l}{D\vartheta^r} \cdot \omega^r \quad (3)$$

wo ϑ^r ein Drehwinkel und $\omega^r = \frac{d\vartheta^r}{dt}$ die Drehgeschwindigkeit des Ankers bedeutet.

Weiter läßt sich die kovariante Ableitung $\frac{Dv^l}{D\vartheta^r}$ ausdrücken:

$$\frac{Dv^l}{D\vartheta^r} = \frac{\partial v^l}{\partial \vartheta^r} + \Gamma_{rj}^l v^j \quad (4)$$

und nach Einsetzen in (2) ergibt sich eine Grundgleichung

$$u_k = R_{kj} \dot{v}^j + L_{kl} \left(\frac{\partial v^l}{\partial \vartheta^r} + \Gamma_{rj}^l v^j \right) \omega^r, \quad (2')$$

¹ J. Kučera: „Otočné souřadnicové systémy v theorii elektrických stroju“ (Koordinatendrehssysteme in der Theorie der elektrischen Maschinen). Sbornik ČVUT, Heft 5. Prag. 1950; „Les repères tournants dans l'analyse tensorielle des machines électriques“, R. G. E., Bd. 61, S. 325–338 (1952).

aus der die Impedanzmatrix der allgemeinen elektrischen Maschine zusammengestellt werden kann. Das affine Symbol Γ_{ij}^l eines holonomen Systems ist symmetrisch, d. h.

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$$

In einem holonomen Raum sind die Koordinatenachsen an die einzelnen Wicklungsachsen gebunden. Aus den Gleichungen (2) bzw. (2') läßt sich die Wirkungsweise einer elektrischen Maschine im holonomen sowie unholonomen Raum feststellen.

II. Elektrische Maschine im holonomen Raum

Die Theorie einer elektrischen Maschine läßt sich am leichtesten im quasiholonomen Raum erklären. Die Koordinatenachsen dieses Raumes sind geradlinig und befinden sich im Raum in Ruhe. Dieses System ist besonders passend für die Lösung der Kommutatormaschinen, wo die Achsenrichtungen durch die Lage der Bürstensäetze festgelegt sind. Diese Methode hat den Vorteil, daß die Rotation des Achsensystems nicht in Betracht kommt, da das affine Symbol $\Gamma_{\lambda q}^{\kappa} = 0$ verschwindet. In diese Art der Lösung können auch andere Maschinen einbezogen werden, die zwar keine Kommutatorwicklung besitzen, aber man kann ihre Wechselstromwicklung durch eine ideale Kommutatorwicklung ersetzen. Man muß bemerken, daß auf diese Weise nur ein stationäres Verhalten einer synchronen oder asynchronen Maschine betrachtet werden kann. Diese Methode ist aber nicht anwendbar, falls es sich um transiente Erscheinungen handelt, z. B. um einen Kurzschluß, wo sich die Lage der einzelnen Wicklungen gegeneinander ändert. In solchem Fall ist die Anwendung eines holonomen Raumes unumgänglich. Man wird nun zeigen, wie der quasiholonome Raum bei einer Lösung der elektrischen Maschine auf den holonomen Raum transformiert werden kann. In der Abb. 1 sind die Lagen der Koordinatenachsen des quasiholonomen Raumes mittels der Bürstensäetze $\beta - \beta'$ und $\gamma - \gamma'$ gegeben und die beweglichen Holonomachsen sind durch die Anzapfungspunkte $b - b'$ und $c - c'$ festgelegt. Im Augenblick t bildet die Achse $\beta - \beta'$ mit $b - b'$ einen Winkel ϑ^r . Wenn wir von einem quasiholonomen Raum in den holonomen übergehen wollen, müssen wir die Transformation des Affinen Symbols ableiten. Allgemein gilt

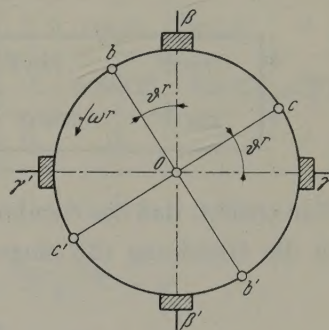


Abb. 1. Koordinatensystem im quasiholonomen Raum

$$\Gamma_{lr}^k = C_{\cdot \kappa}^k C_{\cdot l}^{\lambda} C_{\cdot r}^q \Gamma_{\lambda q}^{\kappa} + C_{\cdot \kappa}^k \frac{\partial C_{\cdot l}^{\kappa}}{\partial \vartheta^r} \quad (5)$$

Da aber bei dem quasiholonomen Raum $\Gamma_{\lambda q}^{\kappa} = 0$ ist, ergibt sich aus der Formel (5):

$$\Gamma_{lr}^k = C_{\cdot \kappa}^k \frac{\partial C_{\cdot l}^{\kappa}}{\partial \vartheta^r} \quad (5')$$

Laut der Abb. 1 leitet man die Transformationsmatrix $C_{\cdot k}^{\kappa}$ ab

$$C_{\cdot k}^{\kappa} = \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline \begin{array}{c} b \\ c \end{array} & \begin{array}{c} e \end{array} \\ \hline \cos \vartheta^r & \sin \vartheta^r \\ \hline -\sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r \\ \hline \end{array} \quad (6)$$

Und da in der Formel (5') auch die inverse Matrix $C_{\cdot n}^k$ vorkommt, ermittelt man aus (6)

$$C_{\cdot n}^k = \begin{array}{c} \beta \qquad \gamma \\ \begin{array}{c} b \\ c \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline \cos \vartheta^r & -\sin \vartheta^r \\ \hline \sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (6')$$

Die Matrizen (6) und (6') sind orthogonal. Endlich hat man in (5') die Ableitung der Matrix (6)

$$\frac{\partial C_{\cdot l}^k}{\partial \vartheta^r} = \begin{array}{c} b \qquad c \\ \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -\sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r \\ \hline -\cos \vartheta^r & -\sin \vartheta^r \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (7)$$

Falls man diese Matrizen in (5') einsetzt, ergibt sich

$$I_{lr}^k = \begin{array}{c} \beta \qquad \gamma \\ \begin{array}{c} b \\ c \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline \cos \vartheta^r & -\sin \vartheta^r \\ \hline \sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} b \qquad c \\ \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline -\sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r \\ \hline -\cos \vartheta^r & -\sin \vartheta^r \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} b \qquad c \\ \begin{array}{c} b \\ c \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (8)$$

Man ersieht, daß das Symbol I_{lr}^k eine Drehung um $-\frac{\pi}{2}$ ausdrückt. Wird das Symbol I_{lr}^k in die Gleichung (2') eingesetzt, so findet man

$$u_k = R_{kj} \dot{v}^j + L_{kl} \left(\frac{\partial v^l}{\partial t} + \Gamma_{jr}^l \omega^r v^j \right). \quad (9)$$

Das erste Glied an der rechten Seite $R_{kj} \dot{v}^j$ entspricht den ohmschen Spannungsabfällen, das zweite $L_{kl} \frac{\partial v^l}{\partial t}$ den induktiven Abfällen und das dritte gibt die von der Rotation herrührenden elektromotorischen Kräfte an:

$$L_{kl} \Gamma_{jr}^l \omega^r v^j = \Gamma_{k,jr} \omega^r v^j.$$

Bei der Transformation muß man die in der Gleichung (9) vorkommenden Konstanten aus dem quasiholonomem in den holonomen Raum übertragen. Dazu erweitert man die Dimensionszahl der Matrix (6), indem man die fehlenden Reihen und Säulen beifügt. Die Widerstandsmatrix wird dann:

$$R_{kj} = \begin{array}{c} a \qquad \beta \qquad \gamma \qquad \delta \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \vartheta^r & -\sin \vartheta^r & 0 \\ \hline 0 & \sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} a \qquad \beta \qquad \gamma \qquad \delta \\ \begin{array}{c} a \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \begin{array}{|cccc|} \hline R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_{33} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_{44} \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} a \qquad b \qquad c \qquad d \\ \begin{array}{c} a \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \vartheta^r & \sin \vartheta^r & 0 \\ \hline 0 & -\sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Falls es $R_{22} = R_{33}$ gibt, ermittelt man nach der Multiplikation:

$$R_{kj} = \begin{array}{c|c|c|c} & a & b & c & d \\ \hline a & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & R_{22} & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & R_{33} & 0 \\ \hline d & 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{array} \quad (10)$$

Ebenso werden auch die Induktanzen transformiert:

$$L_{kl} = \begin{array}{c|c|c|c} & a & \beta & \gamma & \delta \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & \cos \vartheta^r & -\sin \vartheta^r & 0 \\ \hline c & 0 & \sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r & 0 \\ \hline d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c|c|c|c} & a & \beta & \gamma & \delta \\ \hline a & L_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ \hline \beta & M_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ \hline \gamma & 0 & 0 & L_{33} & M_{34} \\ \hline \delta & 0 & 0 & M_{43} & L_{44} \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \beta & 0 & \cos \vartheta^r & \sin \vartheta^r & 0 \\ \hline \gamma & 0 & -\sin \vartheta^r & \cos \vartheta^r & 0 \\ \hline \delta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Und wenn man

$$M_{12} = M_{21}; \quad M_{34} = M_{43}; \quad \frac{L_{22} + L_{33}}{2} = A; \quad \frac{L_{22} - L_{33}}{2} = B$$

setzt, ergibt sich aus diesem Matrizenprodukt:

$$L_{kl} = \begin{array}{c|c|c|c} & a & b & c & d \\ \hline a & L_{11} & M_{12} \cos \vartheta^r & M_{12} \sin \vartheta^r & 0 \\ \hline b & M_{12} \cos \vartheta^r & A + B \cos 2 \vartheta^r & B \sin 2 \vartheta^r & -M_{34} \sin \vartheta^r \\ \hline c & M_{12} \sin \vartheta^r & B \sin 2 \vartheta^r & A - B \cos 2 \vartheta^r & M_{34} \cos \vartheta^r \\ \hline d & 0 & -M_{34} \sin \vartheta^r & M_{34} \cos \vartheta^r & L_{44} \end{array} \quad (11)$$

Falls man auch die Matrix des Symbols Γ_{jr}^l , erweitert, dann folgt:

$$\Gamma_{jr}^l \omega^r = \begin{array}{c|c|c|c} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 0 & \omega^r & 0 \\ \hline c & 0 & -\omega^r & 0 & 0 \\ \hline d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (12)$$

und damit ergibt sich das Produkt:

$$\omega^r \Gamma_{jr}^t L_{lk} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^r & 0 \\ 0 & -\omega^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \omega^r \Gamma_{k,jr} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} \cos \vartheta^r & M_{12} \sin \vartheta^r & 0 \\ M_{12} \cos \vartheta^r & A + B \cos 2 \vartheta^r & B \sin 2 \vartheta^r & -M_{34} \sin \vartheta^r \\ M_{12} \sin \vartheta^r & B \sin 2 \vartheta^r & A - B \cos 2 \vartheta^r & M_{34} \cos \vartheta^r \\ 0 & -M_{34} \sin \vartheta^r & M_{34} \cos \vartheta^r & L_{44} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

was nach der Multiplikation gibt:

$$\omega^r \Gamma_{k,jr} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} \omega^r \sin \vartheta^r & B \omega^r \sin 2 \vartheta^r & A \omega^r - B \omega^r \cos 2 \vartheta^r & M_{34} \omega^r \cos \vartheta^r \\ -M_{12} \omega^r \cos \vartheta^r & -A \omega^r - B \omega^r \cos 2 \vartheta^r & -B \omega^r \sin 2 \vartheta^r & M_{34} \omega^r \sin \vartheta^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (13)$$

Werden die Matrizen (10), (11), (13) in die Gleichung (9) eingesetzt, so findet man eine Impedanzmatrix:

$$\underline{Z'} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} \left[R_{11} + L_{11} \frac{d}{dt} \right] & M_{12} \frac{d}{dt} (\cos \vartheta^r) & M_{12} \frac{d}{dt} (\sin \vartheta^r) & 0 \\ M_{12} \left[\frac{d}{dt} (\cos \vartheta^r) + \omega^r \sin \vartheta^r \right] & \left[R_{22} + A \frac{d}{dt} \right] + B \left[\frac{d}{dt} (\cos 2 \vartheta^r) + \omega^r \sin 2 \vartheta^r \right] & A \omega^r + B \left[\frac{d}{dt} (\sin 2 \vartheta^r) - \omega^r \cos 2 \vartheta^r \right] & M_{34} \left[\frac{d}{dt} (\sin \vartheta^r) - \omega^r \cos \vartheta^r \right] \\ M_{12} \left[\frac{d}{dt} (\sin \vartheta^r) - \omega^r \cos \vartheta^r \right] & -A \omega^r + B \left[\frac{d}{dt} \sin 2 \vartheta^r - \omega^r \cos 2 \vartheta^r \right] & \left[R_{33} + A \frac{d}{dt} \right] - B \left[\frac{d}{dt} (\cos 2 \vartheta^r) + \omega^r \sin 2 \vartheta^r \right] & M_{34} \left[\frac{d}{dt} (\cos \vartheta^r) + \omega^r \sin \vartheta^r \right] \\ 0 & -M_{34} \frac{d}{dt} (\sin \vartheta^r) & M_{34} \frac{d}{dt} (\cos \vartheta^r) & \left[R_{44} + L_{44} \frac{d}{dt} \right] \end{bmatrix} \end{matrix}$$

und nach der Umrechnung ermittelt man:

	a	b	c	d
a	$\left[R_{11} + L_{11} \frac{d}{dt} \right]$	$M_{12} \left[\cos \vartheta^r \frac{d}{dt} - \omega^r \sin \vartheta^r \right]$	$M_{12} \left[\sin \vartheta^r \frac{d}{dt} + \omega^r \cos \vartheta^r \right]$	0
b	$M_{12} \cos \vartheta^r \frac{d}{dt}$	$\left[R_{22} + A \frac{d}{dt} \right] + B \left[\cos 2\vartheta^r \frac{d}{dt} - \omega^r \sin 2\vartheta^r \right]$	$A \omega^r + B \left[\sin 2\vartheta^r \frac{d}{dt} + \omega^r \cos 2\vartheta^r \right]$	$-M_{34} \sin \vartheta^r \frac{d}{dt}$
c	$M_{12} \sin \vartheta^r \frac{d}{dt}$	$-A \omega^r + B \left[\sin 2\vartheta^r \frac{d}{dt} + \omega^r \cos 2\vartheta^r \right]$	$\left[R_{33} + A \frac{d}{dt} \right] - B \left[\cos 2\vartheta^r \frac{d}{dt} - \omega^r \sin 2\vartheta^r \right]$	$M_{34} \cos \vartheta^r \frac{d}{dt}$
d	0	$-M_{34} \left[\sin \vartheta^r \frac{d}{dt} + \omega^r \cos \vartheta^r \right]$	$M_{34} \left[\cos \vartheta^r \frac{d}{dt} - \omega^r \sin \vartheta^r \right]$	$\left[R_{44} + L_{44} \frac{d}{dt} \right]$

(14)

Die mit Punkt bezeichneten Stellen geben die Lagen der Ströme an, wo diese eingesetzt werden sollen.

Beispiel.

Wir geben ein Beispiel an, wo ein einphasiger Kurzschlußstrom in einem Turboalternator ermittelt wird¹. Da es sich um eine symmetrische Maschine handelt, hat man

$$A = L_{22} = L_{33} = M_{23} = M_{32}; \quad B = 0$$

und da diese Maschine synchron läuft, gilt

$$\omega^r = \omega = 2\pi f$$

Man setzt voraus, daß der Kurzschlußstrom im Augenblick $t = 0$ eine Phasenverschiebung ψ hat, so daß die Lage des Läufers dem Winkel $\vartheta^r = \vartheta = \omega t - \psi$ entspricht. In der Matrix (14) fallen die Reihen und Säulen c, d weg, da die betreffenden Kreise stromlos sind. So reduziert sich die ursprüngliche Impedanzmatrix auf:

	s	a
s	$\left[R_{11} + L_{11} \frac{d}{dt} \right]$	$M_{12} \left[\cos \vartheta \frac{d}{dt} \omega \sin \vartheta \right]$
a	$M_{12} \cos \vartheta \frac{d}{dt}$	$\left[R_{22} + L_{22} \frac{d}{dt} \right]$

(15)

¹ Elektrotechnika, Band 50, 1957, H. 4., S. 135–137. Budapest.

Die Indizes a, b in (14) wurden hier angepaßt und mit s, a bezeichnet. Die Lösung verwirklicht man mittels der Operatorrechnung und dazu überführt man die Matrix (15) in den unteren Bereich von p . So ergibt sich:

$$\underline{Z}(p) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} s \\ a \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} s \\ a \end{array} & \begin{array}{cc} R_{11} + L_{11}p & M_{12} \frac{2p^2\omega \sin \psi + (p^3 - p\omega^2) \cos \psi}{p^2 + \omega^2} \\ \hline M_{12} \frac{p^3 \cos \psi + p^2\omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2} & R_{22} + L_{22}p. \end{array} \end{array} \quad (16)$$

Die Ströme i^s und i^a ergeben sich aus der Admittanzmatrix, die zur Matrix (16) invers ist. Um diese zu berechnen, ermittelt man die Determinante der Matrix (16):

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} + L_{11}p & M_{12} \frac{2p^2\omega \sin \psi + (p^3 - p\omega^2) \cos \psi}{p^2 + \omega^2} \\ M_{12} \frac{p^3 \cos \psi + p^2\omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2} & R_{22} + L_{22}p. \end{vmatrix}$$

Nach der Auswertung findet man:

$$\Delta = \frac{(R_{11} + L_{11}p)(R_{22} + L_{22}p)(p^2 + \omega^2)^2 - M_{12}^2(p^3 \cos \psi + p^2\omega \sin \psi)[2p^2\omega \sin \psi + (p^3 - p\omega^2) \cos \psi]}{(p^2 + \omega^2)^2} \quad (17)$$

Die Admittanzmatrix wird dann:

$$\underline{Y}(p) = \frac{1}{\Delta} \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} s \\ a \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} s \\ a \end{array} & \begin{array}{cc} R_{22} + L_{22}p & -M_{12} \frac{2p^2\omega \sin \psi + (p^3 - p\omega^2) \cos \psi}{p^2 + \omega^2} \\ \hline -M_{12} \frac{p^3 \cos \psi + p^2\omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2} & R_{11} + L_{11}p. \end{array} \end{array} \quad (18)$$

Die betreffenden Ströme ergeben sich, falls man diese Matrix mit einer Spannungsmatrix:

$$\underline{U} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} s \\ a \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} s \\ a \end{array} & \begin{array}{c} U_1 \\ 0 \end{array} \end{array} \quad (19)$$

von der rechten Seite multipliziert. So ergibt sich eine Strommatrix:

$$\underline{I}(p) = \underline{Y}(p) \underline{U} = \frac{1}{\Delta} \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} s \\ a \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} s \\ a \end{array} & \begin{array}{c} (R_{22} + L_{22}p) U_1 \\ \hline -M_{12} \frac{p^3 \cos \psi + p^2\omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2} U_1 \end{array} \end{array} \quad (20)$$

Die betreffenden Ströme werden dann:

$$i^s(p) = \frac{(R_{22} + L_{22}p)(p^2 + \omega^2)^2 U_1}{(R_{11} + L_{11}p)(R_{22} + L_{22}p)(p^2 + \omega^2)^2 - M_{12}^2(p^3 \cos \psi + p^2 \omega \sin \psi)[2p^2 \omega \sin \psi + (p^3 - p\omega^2) \cos \psi]} \quad (21)$$

und

$$i^a(p) = \frac{-M_{12}(p^3 \cos \psi + p^2 \omega \sin \psi)(p^2 + \omega^2) U_1}{(R_{11} + L_{11}p)(R_{22} + L_{22}p)(p^2 + \omega^2)^2 - M_{12}^2(p^3 \cos \psi + p^2 \omega \sin \psi)[2p^2 \omega \sin \psi + (p^3 - p\omega^2) \cos \psi]} \quad (22)$$

Zur Integration dieser Gleichungen benutzt man die klassische Methode von Heaviside. Man zerlegt den Nenner in ein Produkt¹:

$$A_6(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)(p - p_5)(p - p_6)$$

und leitet so den Ständerstrom ab:

$$i^s = \frac{F(0)}{G(0)} + \sum_{i=1}^6 \frac{F(p_i)}{p_i G'(p_i)} e^{p_i t} \quad (23)$$

und ebenso den Läuferstrom:

$$i^r = \sum_{i=1}^6 \frac{H(p_i)}{p_i K'(p_i)} e^{p_i t}. \quad (24)$$

Falls ein Kurzschlußstrom zwischen zwei Phasen erscheint, wird dieser ähnlich berechnet, nur die bezüglichen Konstanten müssen angepaßt werden.

III. Elektrische Maschine im unholonomen Raum

Die unholonomen und holonomen Räume in der Theorie der elektrischen Maschine unterscheiden sich dadurch, daß in einem unholonomen Raum das Achsensystem nicht an die Wicklungen der Maschine gebunden ist, sondern sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit dreht. Wir bezeichnen mit $\omega = 2\pi f$ die Geschwindigkeit des magnetischen Feldes im Ständer, ω' jene des Läufers und mit ω° die Geschwindigkeit des Achsensystems. Zwischen den Achsen 0_1 und $\beta - \beta'$ bzw. 0_2 und $\gamma - \gamma'$ in Abb. 2 liegt ein Winkel $\vartheta^\circ = \omega^\circ t$. Dann ergibt sich zwischen dem quasiholonomen und unholonomen Raum eine Transformationsmatrix:

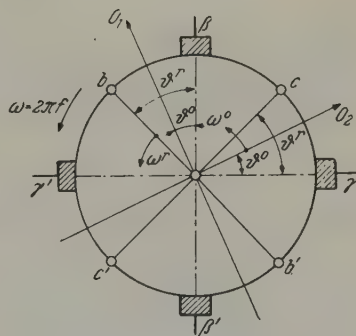


Abb. 2. Koordinatensystem im unholonomen Raum

$$C_{\beta, \gamma}^{\alpha, k_0} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b_0 & c_0 \\ \hline \beta & \begin{array}{cc} \cos \vartheta^\circ & \sin \vartheta^\circ \\ \hline -\sin \vartheta^\circ & \cos \vartheta^\circ \end{array} \\ \gamma & \end{array} \end{array} \quad (25)$$

¹ Siehe z. B. Václav Hruška: „Počet grafický a graficko-mechanický“, Prag 1952. (Graphische und grapho-mechanische Rechnung); E. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar: „Elementary Matrices.“ Cambridge University Press, 1950.

und ihre Inverse:

$$C_{\cdot\kappa}^{k_0} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} \beta \quad \gamma \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} b_0 \\ c_0 \end{array} & \begin{array}{cc} \cos \vartheta^\circ & -\sin \vartheta^\circ \\ \sin \vartheta^\circ & \cos \vartheta^\circ \end{array} \end{array} \quad (26)$$

Im allgemeinen gelten für einen unholonomen Raum nach Pfaff folgende Bedingungen:

$$\Phi_{,\lambda}^k \cdot dx^\lambda = 0. \quad (27)$$

Diese Gleichungen sind nicht integrierbar und zugleich lassen sie keine integrierbaren Kombinationen zu. Infolge dessen existieren keine Funktionen Φ^k , die die Bedingung $\Phi_{,\lambda}^k = x_\lambda \Phi^k$ erfüllen, falls x^λ arbiträre Größen bedeuten, da die Ableitungen nach (27) verschwinden. Diesen Bedingungen nach existiert in einem Riemannschen Raum V_n von n Dimensionen eine unholonome Variete V_n^m , deren tangentielle Verschiebungen die Gleichung (27) erfüllen. Die Pfaffschen Bedingungen in der Theorie der elektrischen Maschinen reduzieren sich auf:

$$M_0 d\vartheta^\circ = 0; \quad (27')$$

in der M_0 das mittels des drehenden Koordinatensystems übertragene Drehmoment bedeutet. Dieses ist aber Null, da die Geschwindigkeit ω° und $d\vartheta^\circ = \omega^\circ dt$ beliebige Werte sind.

Um die Spannungsgleichung von einer allgemeinen elektrischen Maschine im unholonomen Raum abzuleiten, ermitteln wir das bezügliche affine Symbol. Dieses ergibt sich aus der Gleichung (5), laut der ist:

$$\Gamma_{l_0 r_0}^{k_0} = C_{\cdot\kappa}^{k_0} C_{\cdot l_0}^\lambda C_{r_0}^\rho \Gamma_{\lambda \rho}^\kappa + C_{\cdot\kappa}^{k_0} \frac{\partial C_{\cdot l_0}^\kappa}{\partial \vartheta^\circ}. \quad (28)$$

Die griechischen Indizes beziehen sich auf den quasiholonomen und die lateinischen auf den unholonomen Raum. Da im quasiholonomen Raum $\Gamma_{\lambda \rho}^\kappa = 0$ ist, leitet man aus der Gleichung (28) ab:

$$\Gamma_{l_0 r_0}^{k_0} = C_{\cdot\kappa}^{k_0} \frac{\partial C_{\cdot l_0}^\kappa}{\partial \vartheta^\circ}. \quad (28')$$

Wenn man die Matrizen (25) und (26) einsetzt, ergibt sich:

$$\Gamma_{l_0 r_0}^{k_0} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} \beta \quad \gamma \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} b_0 \\ c_0 \end{array} & \begin{array}{cc} \cos \vartheta^\circ & -\sin \vartheta^\circ \\ \sin \vartheta^\circ & \cos \vartheta^\circ \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} b_0 \quad c_0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \beta \\ \gamma \end{array} & \begin{array}{cc} -\sin \vartheta^\circ & \cos \vartheta^\circ \\ -\cos \vartheta^\circ & -\sin \vartheta^\circ \end{array} \end{array} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} b_0 \quad c_0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} b_0 \\ c_0 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \end{array} \quad (29)$$

Ebenso werden auch die Kreiskonstanten laut den Gleichungen (10) und (11) transformiert, wobei die Transformationsmatrix (25) angewendet wird. So ergibt sich wieder:

$$R_{k_0 j_0} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ \hline a_0 & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & R_{22} & 0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & R_{33} & 0 \\ d_0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{array} \quad (30)$$

falls $R_{22} = R_{33}$ ist. Ebenso findet man:

$$L_{k_0 l_0} = \begin{array}{c|cccc} & a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ \hline a_0 & L_{11} & M_{12} \cos \vartheta^\circ & M_{12} \sin \vartheta^\circ & 0 \\ b_0 & M_{12} \cos \vartheta^\circ & A + B \cos 2 \vartheta^\circ & B \sin 2 \vartheta^\circ & -M_{34} \sin \vartheta^\circ \\ c_0 & M_{12} \sin \vartheta^\circ & B \sin 2 \vartheta^\circ & A - B \cos 2 \vartheta^\circ & M_{34} \cos \vartheta^\circ \\ d_0 & 0 & -M_{34} \sin \vartheta^\circ & M_{34} \cos \vartheta^\circ & L_{44} \end{array} \quad (31)$$

Soll man die Wirkungsweise einer elektrischen Maschine untersuchen, müssen die Matrizen (30) und (31) auf die beweglichen Achsen des Läufers bezogen werden. Dazu ermittelt man aus der Abb. 2 folgende Transformationsmatrix:

$$C_{\cdot k}^{k_0} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & \cos (\vartheta^r - \vartheta^\circ) & \sin (\vartheta^r - \vartheta^\circ) & 0 \\ c_0 & 0 & -\sin (\vartheta^r - \vartheta^\circ) & \cos (\vartheta^r - \vartheta^\circ) & 0 \\ d_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (32)$$

Auf diese Weise gehen die Matrizen (30) und (31) in jene von (10) und (11) über. Wird zugleich das affine Symbol laut der Gleichung (5) transformiert, so ergibt sich:

$$I_{lr}^k = C_{\cdot k_0}^k C_{\cdot l}^{l_0} C_{\cdot r}^{r_0} I_{l_0 r_0}^{k_0} + C_{\cdot k_0}^k \frac{\partial C_{\cdot l}^{k_0}}{\partial \vartheta^\circ}. \quad (33)$$

Werden die betreffenden Werte eingesetzt und $C_{\cdot r}^{r_0} = \frac{\omega^0 - \omega^r}{\omega^r}$ gesetzt, so findet man:

$$I_{lr}^k = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & \frac{\omega^0 - \omega^r}{\omega^r} & 0 \\ c & 0 & -\frac{\omega^0 - \omega^r}{\omega^r} & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} + \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & \frac{\omega^0}{\omega^r} & 0 \\ c & 0 & -\frac{\omega^0}{\omega^r} & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (34)$$

Nach einem Vergleich mit (8) konstatiert man, daß

$$I_{lr}^k \omega^r = I_{l_0 r_0}^{k_0} \omega^0 = \text{Invariant} \quad (35)$$

ist. Wenn man weiter annimmt, daß $k \equiv k_0$ und $l \equiv l_0$ ist, so ergibt sich eine absolute Ableitung:

$$\frac{D i^{k_0}}{D t} = \frac{\partial i^{k_0}}{\partial t} + I_{l_0 r_0}^{k_0} \omega^0 i^{l_0}; \quad (36)$$

die der Gleichung (4) ähnlich ist.

(Eingegangen am 25. April 1958)

(Mitteilung aus der Physikalischen Forschungsabteilung der Österreichischen Stickstoffwerke A. G.,
Linz a. d. Donau)

Zur Berechnung des Kreuzstrom-Rekuperators

Von A. Huber, Linz a. d. D.

Mit 5 Textabbildungen

Zusammenfassung. Bekanntlich hat W. Nusselt die dimensionslose mittlere Austrittstemperatur T_m bei Kreuzstrom als Funktion von zwei Größen a und b dargestellt, die den stündlichen Wasserwerten der beiden Ströme verkehrt proportional sind. Diese Abhängigkeit läßt sich mit einer für die Praxis meist hinreichenden Genauigkeit durch eine nach dem Parameter T_m bezifferte Geradenschar wiedergeben, wenn a und b als rechtwinkelige Koordinaten benützt werden. Die Anwendung einer solchen Netztafel wird an zwei praktischen Beispielen erläutert.

I. Bemerkungen zur Kreuzstromformel von Nusselt

Bezeichnet man die mittleren Ein- und Austrittstemperaturen der beiden Flüssigkeiten mit t_i' bzw. t_i'' ($i = 1, 2$), die stündlichen Wasserwerte mit W_i , mit k die Wärmedurchgangszahl, mit $F = l_1 \cdot l_2$ die Heizfläche und setzt man

$$x_i = \frac{k \cdot F}{W_i}, \quad (x_1 = a; \quad x_2 = b)^1$$

dann kann man die von Nusselt² entwickelte Formel für die dimensionslose Austrittstemperatur

$$\tau = \frac{t_2'' - t_1'}{t_2' - t_1'} \dots (\tau = T_m) \quad (1)$$

in der folgenden Form schreiben:

$$\tau = \Phi(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{x_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_1) \cdot s_n(x_2) \quad (2)$$

wobei

$$s_n(x) = 1 - e^{-x} \cdot \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \quad (3)$$

Da $s_0(x) = 1 - e^{-x}$, während für $n \geq 1$ und $x \sim 0$

$$s_n(x) = 1 - e^{-x} \cdot \left[e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \dots \right] = e^{-x} \cdot x^{n+1} \cdot \left[\frac{1}{(n+1)!} + \dots \right],$$

so wird

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \Phi(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{1}{x_1} \cdot \left[(1 - e^{-x_1})(1 - e^{-x_2}) + e^{-x_1} \cdot x_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \dots \right) \cdot s_1(x_2) + \dots \right] \right\} = e^{-x_2},$$

dagegen wegen $s_n(0) = 0$ ($n = 0, 1, 2 \dots$) für alle x_1

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \Phi(x_1, x_2) = 1.$$

¹ Die in Klammern beigefügten Symbole sind die von Nusselt verwendeten.

² W. Nusselt: Eine neue Formel für den Wärmedurchgang im Kreuzstrom. Techn. Mech. u. Thermodyn. I = Forsch. Geb. Ingwes. I, 417/422 (1930).

Für einen endlichen Wert von kF ist offenbar $x_1 \rightarrow 0$ für $W_1 \rightarrow \infty$, so daß aus (1) folgt

$$\lim_{W_1 \rightarrow \infty} t_2'' = t_1' + e^{-x_2} \cdot (t_2' - t_1'),$$

während

$$\lim_{W_2 \rightarrow \infty} t_2'' = t_2', \text{ wie es ja sein muß.}$$

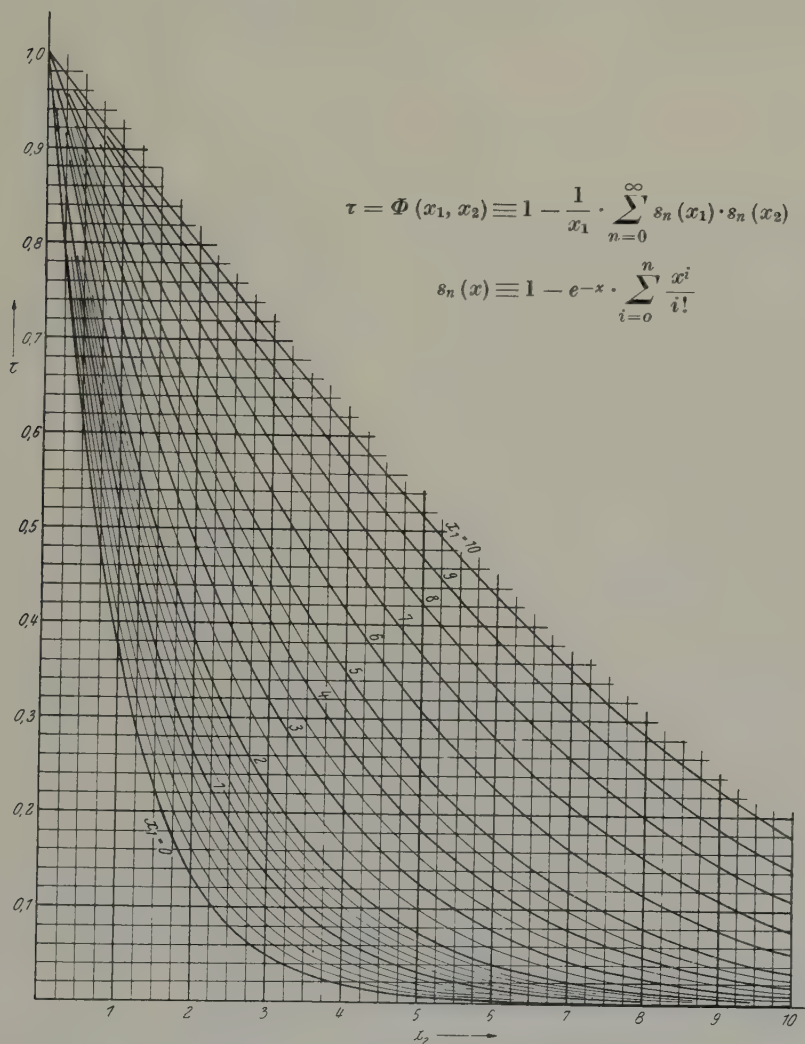


Abb. 2. Die dimensionslose mittlere Austrittstemperatur für den Kreuzstrom-Rekuperator

Aus der Entwicklung (2) ist sofort zu sehen, daß $\Phi(x_1, x_2)$ die folgende Funktionalgleichung erfüllt

$$x_1 \cdot [\Phi(x_1, x_2) - 1] = x_2 \cdot [\Phi(x_2, x_1) - 1], \quad (4)$$

die physikalisch besagt, daß die übertragene Wärmemenge Q auf zwei Arten ausgedrückt werden kann:

$$Q = W_1 \cdot (t_1' - t_1'') = W_2 \cdot (t_2'' - t_2').$$

Die Relation (4) scheint bisher unbeachtet geblieben zu sein, denn mit ihr kann man bequem feststellen, daß sich in der von Nusselt mitgeteilten Tabelle für T_m unter den mit fünf Dezimalen angegebenen Werten einige befinden, bei denen bereits die dritte Stelle fehlerhaft ist, was allerdings praktisch noch immer belanglos ist.

II. Näherungsdarstellung der Kreuzstromformel durch eine geradlinige Netztafel

Mit Hilfe zweier weiteren von Nusselt berechneten Tabellen kann man verschiedene Aufgaben über Kreuzstromwärmetauscher lösen, doch die dabei notwendige Interpolation in einer Tabelle mit zwei Eingängen ist bekanntlich oft unbequem. Besonders

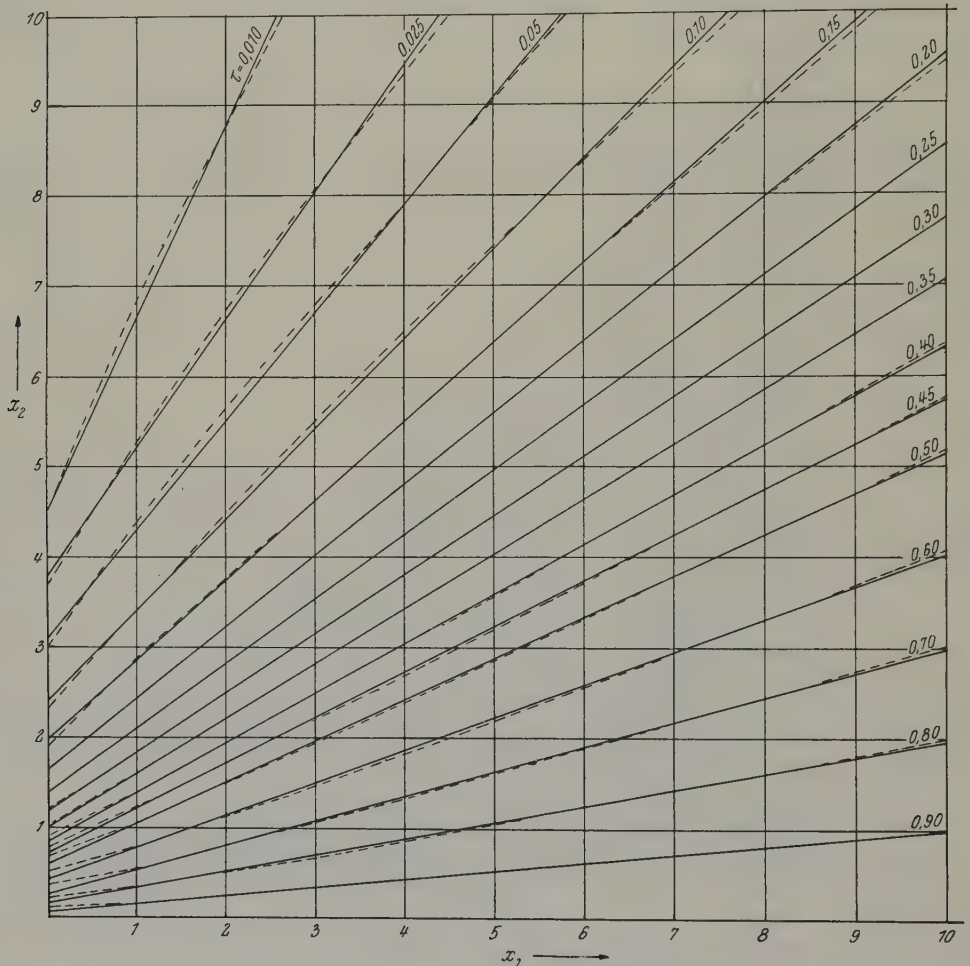


Abb. 3. Vergleich der genauen Netztafel mit der näherungsweise gültigen geradlinigen

dann, wenn die x_i selber von der Variation einiger Parameter betroffen werden, wird sich eine, wenn auch nur näherungsweise gültige Darstellung des Zusammenhanges zwischen τ und den x_i , in der die x_i linear eintreten, handlicher als (2) erweisen. Zu einer solchen Darstellung gelangt man aber leicht, wenn man bemerkt, daß im Diagramm 2, in dem τ durch eine nach dem Parameter x_1 bezifferte Kurvenschar als Funktion von x_2 wiedergegeben ist, für $\tau = \text{const.}$ äquidistanten Werten von x_1 ungefähr auch äquidistante Werte von x_2 entsprechen. Der analytische Ausdruck für

diesen, allerdings nur näherungsweise gültigen Zusammenhang lautet daher

$$m_1(\tau) \cdot x_1 + m_2(\tau) \cdot x_2 - 1 = 0, \quad (5)$$

wobei die $m_i(\tau)$ die vom Scharparameter τ abhängigen reziproken Achsenabschnitte der mit τ bezifferten Geraden der Schar bedeuten.

Im Diagramm 3 sind neben den strichliert eingezeichneten genauen Kurven $\tau = \text{const.}$ diese mit τ bezifferten Geraden als Näherungen jener Kurven voll ausgezogen eingetragen. Man sieht daraus, daß die Kurven $\tau = \text{const.}$ für kleine Werte von τ nach unten, für $\tau \rightarrow 1$ dagegen nach oben konkav sind.

Da man aus dem Diagramm 3 die Werte der $m_i(\tau)$ nicht unmittelbar ablesen und sie aus ihren Schnittpunkten mit den Seiten des Quadrates nur ungenau berechnen kann, wurden sie im Diagramm 4 durch zwei Kurven dargestellt. Mit den daraus zu entnehmenden Werten der $m_i(\tau)$ kann man die Relation (5) auch für analytische Operationen statt (2) benutzen, wenn es auf keine große Genauigkeit ankommt.

III. Beispiele für die Anwendung der Diagramme

1. Aus den vier gegebenen Temperaturen t_i' und t_i'' soll Q/kF berechnet werden. Zur Lösung dieser Aufgabe benutzt Nusselt eine Tabelle mit zwei Eingängen, wobei, wie schon erwähnt, die Interpolation unbequem ist.

Wir berechnen zunächst $\tau = \frac{t_2'' - t_1'}{t_2' - t_1'}$ und aus $Q = W_i \cdot |t_i'' - t_i'|$ ($i = 1, 2$) das Verhältnis

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{x_2}{x_1} = w.$$

Die Abszisse x_1 des Schnittpunktes der Geraden $x_2 = w \cdot x_1$ mit der zu τ gehörigen Geraden des Diagrammes 3 ergibt sodann

$$\frac{Q}{kF} = \frac{Q}{x_1 W_1} = \frac{t_1'' - t_1'}{x_1}.$$

Da aber die beiden Geraden meist einen sehr schleifenden Schnitt ergeben und die Netzgerade oft nach dem Augenmaß zu interpolieren ist, wird x_1 ziemlich ungenau. Man verwendet dann vorteilhafter das Diagramm 4, dem man die $m_i(\tau)$ entnimmt und damit

$$x_1 = \frac{1}{m_1 + w \cdot m_2} = \frac{kF}{W_1} \text{ bildet.}$$

Mit den von Nusselt gewählten Werten, $t_1' = 0$; $t_1'' = 73,2$; $t_2' = 100$; $t_2'' = 63,4$ wird $\tau = 0,634$ und $w = 0,5$. Damit findet man: $m_1 = -0,90$; $m_2 = 2,75$ und daher $\frac{1}{x_1} = -0,90 + 1,38 = 0,48$, also $Q/kF = 0,48 \cdot 73,2 = 35,0$, während Nusselt 36,6 angibt.

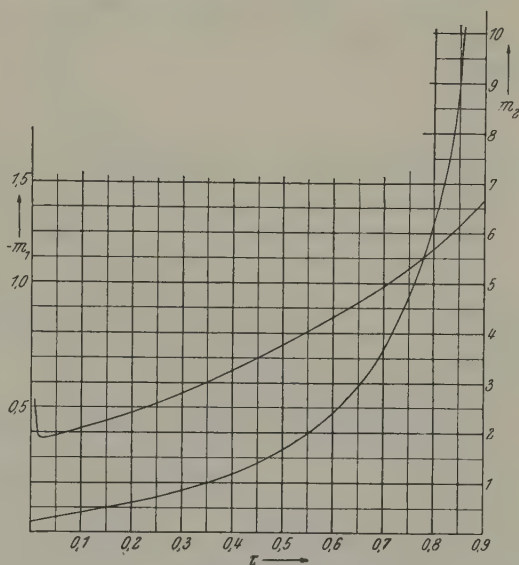


Abb. 4. Die Koeffizienten der Gleichungen der Geraden von Abb. 3

2. Das folgende Beispiel macht zwar einen gekünstelten Eindruck, ist aber tatsächlich aus einem Problem der Praxis hervorgegangen, nämlich aus der Frage nach der Dimensionierung eines Kühltroges. Gegeben sind: t_1' , t_2' , t_2'' , l_1 , W_2 , die Wärmeübergangszahl α_2 , die erforderlichen Stoffwerte und die Dicke h der von dem Kühlmittel mit dem stündlichen Wasserwert W_1 gebildeten Schicht. Es ist die Beziehung zu finden, die zwischen l_2 und W_1 bestehen muß, damit die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt werden.

Da nach (1) der Wert von τ bestimmt ist, liefert (5) eine allerdings nur näherungsweise gültige lineare Relation zwischen x_1 und x_2 , die wir hier folgendermaßen schreiben können:

$$\frac{1}{kF} = \frac{1}{kl_1 l_2} = \frac{m_1(\tau)}{W_1} + \frac{m_2(\tau)}{W_2} \quad (6)$$

Hier tritt aber noch das insbesondere von l_2 und W_1 abhängige k auf, denn es ist ja unter Vernachlässigung des Wärmewiderstandes der Trennungswand

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad (7)$$

wobei $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{d} \cdot Nu$ (λ_1 = Wärmeleitfähigkeit des Kühlmittels, d = hydraulischer Durchmesser des flachen Kanals mit der Höhe h und der Breite l_2 , also $d \doteq 2h$, da $h \ll l_2$).

Da das Kühlmittel laminar strömt, kann man nach H. Hausen¹ setzen:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{2h} \cdot \left(3,65 + \frac{0,0668}{z + 0,045 \cdot z^{1/3}} \right) = \frac{\lambda_1}{2h} \cdot f(z), \quad (8)$$

wobei $z = \frac{l_1}{2h \cdot Péc}$ und die Péclet-Zahl: $Péc = \frac{2h \cdot v_1}{a_1}$ (v_1 = Geschwindigkeit, a_1 = Temperaturleitzahl des Kühlmittels).

Mit der Volumsgeschwindigkeit V_1 wird: $v_1 = \frac{V_1}{h \cdot l_2}$, oder wenn c_1 und γ_1 spezifische Wärme und spezifisches Gewicht, also: $W_1 = V_1 \cdot c_1 \cdot \gamma_1$:

$$v_1 = \frac{W_1}{h \cdot l_2 \cdot c_1 \cdot \gamma_1}; \quad Péc = \frac{2W_1}{a_1 \cdot c_1 \cdot \gamma_1 \cdot l_2},$$

oder $z = c \cdot y$ mit

$$c = \frac{a_1 \cdot c_1 \cdot \gamma_1 \cdot l_1}{4h}, \quad y = \frac{l_2}{W_1}. \quad (8')$$

Nach (6), (7) und (8) erhält man die gesuchte Beziehung zwischen l_2 und W_1 :

$$\frac{1}{k} = l_1 l_2 \cdot \left(\frac{m_1}{w_1} + \frac{m_2}{w_2} \right) = \frac{2h}{\lambda_1 \cdot f\left(e \cdot \frac{l_2}{w_1}\right)} + \frac{1}{\alpha_2}$$

oder nach Division durch $\frac{l_1 m_2}{W_2}$:

$$l_2 = \frac{W_2}{l_1 \cdot m_2 \cdot \alpha_2} - W_2 \frac{m_1}{m_2} \cdot y + \frac{2h W_2}{\lambda_1 \cdot l_1 \cdot m_2 \cdot f(c \cdot y)} \quad (9)$$

Für das oben erwähnte Problem waren gegeben:

$$t_1' = 20; \quad t_2' = 500; \quad t_2'' = 100; \quad l_1 = 0,3 \text{ m}; \quad W_2 = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{gr}}, \quad h = 0,04 \text{ m}, \quad \alpha_2 = 100 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{ h gr}}$$

¹ H. Hausen: Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom. S. 41f., Springer 1950.

und das Kühlmittel sei Wasser mit

$$c_1 = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{gr}}, \quad \gamma_1 = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \lambda_1 = 0,5 \frac{\text{kcal}}{\text{m} \cdot \text{h} \cdot \text{gr}}; \quad a_1 = 5 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{h}}.$$

Zunächst wird $\tau = 0,167$ und damit nach Abb. 4: $m_1 = -0,46$; $m_2 = 0,55$, so daß nach (8'):

$$c = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{0,16} = 0,94 \frac{\text{kcal}}{\text{m} \cdot \text{h} \cdot \text{gr}}.$$

Ferner werden die Koeffizienten von (9):

$$\frac{W_2}{a_2 \cdot m_2 \cdot l_1} = \frac{20}{100 \cdot 0,55 \cdot 0,3} = 1,21 \text{ m};$$

$$W_2 \frac{m_1}{m_2} = -16,7 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{gr}};$$

$$\frac{2 \cdot h \cdot W_2}{\lambda_1 \cdot l_1 \cdot m_2} = 19,4 \text{ m} \text{ und somit (9):}$$

$$l_2 = 1,21 + 16,7 \cdot y + \frac{19,4}{f(0,94 \cdot y)}.$$

Aus dem Diagramm 5 ist zu sehen, daß für $l_2 < 2 \text{ m}$ der Kühlwasserverbrauch mit abnehmendem l_2 sehr schnell anwächst, während eine Vergrößerung von l_2 keine merkliche Verminderung von W_1 nach sich zieht. Übrigens zeigt die Rechnung, daß das Glied $16,7 \cdot y$ praktisch vernachlässigt werden kann.

Ich danke der Unternehmungsleitung der Österreichischen Stickstoffwerke A. G., Linz a. d. Donau, für die Erlaubnis zur Veröffentlichung der Arbeit sowie Frau Doktor A. Klingst für die mit der „Z 22“ ausgeführte Tabulierung der Funktion $\Phi(x_1, x_2)$.

(Eingegangen am 6. Mai 1958)

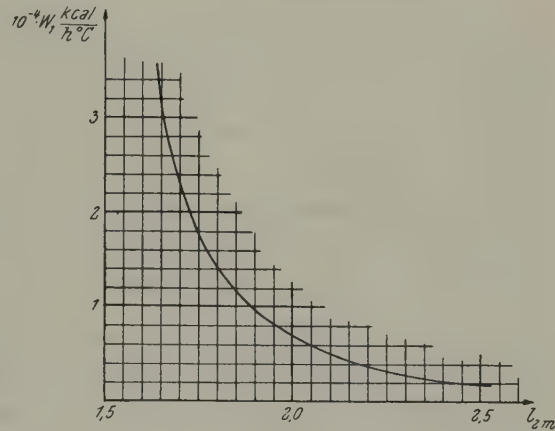


Abb. 5. Wasserverbrauch als Funktion der Troglänge

Beitrag zu den Wirbelsätzen der Magnetohydrodynamik

W. Peschka, Wien

Mit 1 Textabbildung

Zusammenfassung. Die Wirbelsätze von Bjerkness und L. Crocco werden für die Magnetohydrodynamik verallgemeinert. Ferner werden zwei Integrale der Gleichungen der Magnetohydrodynamik für den Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit von unendlicher Leitfähigkeit angegeben. Die eine Lösung entspricht der Bernoullischen Gleichung der Hydrodynamik, die andere der Kármánschen Wirbelstraße. Beiden Lösungen kommt jedoch nicht die Bedeutung zu, die sie in der Hydrodynamik besitzen.

1. Die Aufgabe der Magnetohydrodynamik ist die Erforschung der Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit leitenden Gasen und Flüssigkeiten auf der Basis einer Kontinuumstheorie. Die Grundgleichungen sind demnach eine Kopplung der Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik mit den Gleichungen der Hydrodynamik. Sie lauten folgendermaßen*:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathfrak{w} \times \mathfrak{B}) + \nu_m \Delta \mathfrak{B} \quad \nu_m = \frac{c_0^2}{4\pi \sigma \mu} \quad (1)$$

* s. 1, 9, 10. In 1 befindet sich auch ein ausführliches Literaturverzeichnis.

$$\nabla \mathfrak{B} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) + \nu \Delta w + \left(\frac{\zeta}{\varrho} + \frac{\nu}{3}\right) \nabla (\nabla w)^* \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla (\varrho w) = 0 \quad (4)$$

$$p = p(\varrho, T) \quad (5)$$

$$\varrho \cdot T \cdot \frac{ds}{dt} = \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\nu_m}{4\pi\mu} (\nabla \times \mathfrak{B})^2 + \nabla (\kappa \nabla T)^* \quad (6)$$

Gl. (1) und (2) erhält man aus den Maxwell'schen Gleichungen unter der vereinfachenden Annahme, daß die Leitfähigkeit σ isotrop, also ein Skalar ist, daß der Verschiebungsstrom sowie der Konvektionsstrom gegen den Leitungsstrom vernachlässigbar $\left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\omega}{\sigma} \ll 1, \omega \text{ Kreisfrequenz, } \varepsilon_0 \text{ Dielektrizitätskonstante}\right)$ sowie daß die Permeabilität μ konstant ist.

Gl. (3) ist die Bewegungsgleichung eines strömenden Mediums mit der kinematischen Zähigkeit ν und der Volumviskosität ζ , ergänzt durch die auf die Masseneinheit bezogene elektromagnetische Kraft $\bar{f}_e = \frac{1}{\varrho} \left(\varrho_e \mathfrak{E} + \frac{1}{c_0} \mathfrak{i} \times \mathfrak{H} \right)$, wobei ϱ_e die Ladungsdichte und $\mathfrak{i}$ die Stromdichte ist. Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt jedoch, daß das erste Glied, verglichen mit dem zweiten Glied, von der Größenordnung $\frac{w^2}{c^2}$ ist, also vernachlässigt werden kann, da im allgemeinen die makroskopische Geschwindigkeit w des Mediums klein gegen die Lichtgeschwindigkeit vorausgesetzt ist. Ansonsten treten relativistische Effekte auf. Relativistische Verallgemeinerungen der Magnetohydrodynamik wurden bereits durchgeführt.** Daraus folgt, daß relativistische Effekte dann nicht mehr vernachlässigbar sind, wenn $\frac{B^2}{4\pi\mu} \sim \varrho c^2$, also wenn die magnetische Energiedichte mit der gesamten Energiedichte des Mediums, einschließlich der Ruhenergiedichte vergleichbar wird. Gl. (4) ist die Kontinuitätsgleichung, Gl. (5) die Zustandsgleichung des Mediums. Gl. (6) folgt aus dem Energiesatz***, wobei s die Entropie je Masseneinheit, k die Wärmeleitfähigkeit und σ_{ik} den Spannungstensor bedeutet.****

Den folgenden Untersuchungen ist eine vollkommene Flüssigkeit mit verschwindendem spezifischen Widerstand $\left(\frac{1}{\sigma} = 0, \nu = 0, \zeta = 0, \kappa = 0\right)$ zugrunde gelegt.

Die Gleichungen (1) bis (6) vereinfachen sich dann auf folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \nabla \times (w \times \mathfrak{B}) \quad (7)$$

$$\nabla \mathfrak{B} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla (\varrho w) = 0 \quad (10)$$

* $\frac{d}{dt}$ bedeutet hier, wie auch im folgenden, die substantielle Ableitung.

** S. 2.

*** S. 1.

**** $\sigma_{ik} = \varrho \nu \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial w_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \cdot \delta_{ik} \frac{\partial w_l}{\partial x_l}$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (11)$$

$$p = p(\varrho, s) \quad (12)$$

Gl. (11) drückt die Erhaltung der Entropie bei adiabatischer Bewegung aus.

2. Zunächst möge entlang einer geschlossenen flüssigen Linie das Integral $\Gamma = \oint \mathfrak{w} d\mathfrak{s}$, die Zirkulation, gebildet werden:

$$\Gamma = \oint \mathfrak{w} d\mathfrak{s} = \int (\nabla \times \mathfrak{w}) d\mathfrak{f} \quad (13)$$

Die Änderung der Zirkulation ist dann gleich

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathfrak{w} d\mathfrak{s} \quad (14)$$

Nach kurzer Umformung kann dann geschrieben werden:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int \left(\nabla \times \frac{d\mathfrak{w}}{dt} \right) d\mathfrak{f} \quad (15)$$

Mit Gl. (9) erhält man daraus:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \int \left(\nabla \times \frac{1}{\varrho} \nabla p \right) d\mathfrak{f} - \int \left[\nabla \times \left(\frac{1}{4\pi\mu\varrho} \mathfrak{B} \times \nabla \times \mathfrak{B} \right) \right] d\mathfrak{f} \quad (16)$$

was unter Verwendung bekannter vektoranalytischer Beziehungen folgendes ergibt:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int \left(\nabla \frac{1}{\varrho} \times \nabla p \right) d\mathfrak{f} - \int \left[\nabla \times \left(\frac{1}{4\pi\mu\varrho} \mathfrak{B} \times \nabla \times \mathfrak{B} \right) \right] d\mathfrak{f} \quad (17)$$

Wenn nun das zweite Integral auf der rechten Seite verschwindet, so reduziert sich Gl. (17) auf:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int \left(\nabla \frac{1}{\varrho} \times \nabla p \right) d\mathfrak{f} \quad (18)$$

Gl. (18) ist aber der wohlbekannte Satz von Bjerkness, der besagt, daß bei barotroper Strömung die substantielle Änderung der Zirkulation Null ist. Gl. (17) ist also der Bjerkness'sche Wirbelsatz der Magnetohydrodynamik.

Bei barotroper Strömung und nicht verschwindendem Feld $\mathfrak{B}$ schreibt sich Gl. (17):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \int \left[\nabla \times \left(\frac{1}{4\pi\mu\varrho} \mathfrak{B} \times \nabla \times \mathfrak{B} \right) \right] d\mathfrak{f} \quad (19)$$

Für $\mathfrak{B} \neq 0$ verschwindet das Integral auf der rechten Seite in folgenden Fällen:

$$\text{a) } \frac{1}{\varrho} \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) = \nabla \varphi \quad (20)$$

wenn also die elektromagnetische Kraft ein Potential besitzt.

$$\text{b) } \mathfrak{B} \parallel \nabla \times \mathfrak{B} \quad (21)$$

da $\nabla \times \mathfrak{B} = \mu \nabla \times \mathfrak{S} = \mu \cdot \mathfrak{i}$, so bedeutet dies, daß $\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{i}$, die Lorentzkraft $\mathfrak{i} \times \mathfrak{B}$ also verschwindet, so daß in diesem Fall das elektromagnetische Feld keine Kraft auf die Materie ausübt.

Bei inkompressibler Strömung $\varrho = \text{const.}$ ergibt Gl. (17) die bereits bekannte Verallgemeinerung des klassischen Thomsonschen Satzes.*

* s. 1, 3.

3. Man kann ein Integral der Gleichungen (7) bis (12) bekommen, wenn man Gl. (9) entlang einer Stromlinie C integriert.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (w \nabla) w = -\frac{1}{\varrho} \nabla p - \frac{1}{4\pi \mu \varrho} \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) \quad d\tau \parallel w \quad (22)$$

$$\int_C \frac{\partial w}{\partial t} d\tau + \int_C [(w \nabla) w] d\tau = - \int_C \frac{1}{\varrho} \nabla p d\tau - \frac{1}{4\pi \mu} \int_C \frac{1}{\varrho} [\mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B})] d\tau + \mathfrak{E}(t) \quad (23)$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite kann umgeformt werden, und man erhält:

$$\int_C \frac{\partial w}{\partial t} d\tau + \frac{w^2}{2} + \int_C \frac{dp}{\varrho} = - \frac{1}{4\pi \mu} \int_C \frac{1}{\varrho} [\mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B})] d\tau + \mathfrak{E}(t) \quad (24)$$

Bei stationärer Strömung ist $\frac{\partial w}{\partial t} \equiv 0$ und $\mathfrak{E}(t) = \text{const.}$, ist ferner $\varrho = \text{const.}$, dann erhält man:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{4\pi \mu \varrho} \int_C [\mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B})] d\tau + \text{const.} \quad (25)$$

Das Integral stellt die Arbeit der elektromagnetischen Kraft entlang der Stromlinie C dar. Der Integrand kann mit Hilfe bekannter vektoranalytischer Beziehungen umgeformt werden und es ergibt sich:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{1}{\varrho} \left(p + \frac{B^2}{8\pi \mu} \right) = \frac{1}{4\pi \mu \varrho} \int_C (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} d\tau + \text{const.} \quad (26)$$

Aus naheliegenden Gründen nennt man $\frac{B^2}{8\pi \mu}$ den „magnetischen Druck“*.

Diese Abspaltung des „magnetischen Druckes“ ist deshalb möglich, weil die elektromagnetischen Kräfte sich aus zwei Anteilen aufbauen, einem „hydrostatischen Druck“ von der Größe $\frac{B^2}{8\pi \mu}$ und einer Zugspannung $\frac{B^2}{4\pi \mu}$ entlang der Kraftlinien. Dies ist aber gleichbedeutend mit einer Zugspannung $\frac{B^2}{8\pi \mu}$ entlang der Kraftlinien, und einem Druck $\frac{B^2}{8\pi \mu}$ senkrecht zu ihnen**.

Gl. (25) bzw. (26) ist die Verallgemeinerung der Bernoullischen Gleichung der Hydrodynamik. Ihre Bedeutung ist hier allerdings nicht so groß wie in der Hydrodynamik, da das Kurvenintegral auf der rechten Seite von Gl. (26) im allgemeinen nicht bekannt ist. In einigen Fällen kann jedoch Gl. (25) bzw. (26) noch weiter vereinfacht werden.

$$a) \quad \mathfrak{B} \parallel \nabla \times \mathfrak{B} \dots \mathfrak{B} \parallel i$$

$$\text{Es gilt dann entlang einer beliebigen Stromlinie: } \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = \text{const.} \quad (27)$$

Das Feld übt also keine Kraft auf das Medium aus.

$$b) \quad \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) = \nabla \varphi$$

$$c) \quad w \times (\nabla \times w) = \frac{1}{4\pi \mu \varrho} \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) \quad (28)$$

$$\text{also:} \quad w = \pm \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{4\pi \mu \varrho}} \quad *** \quad (29)$$

* s. 9.

** Dies folgt unmittelbar aus Gl. (26), da wegen $\nabla \mathfrak{B} = 0$; $(\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} = \nabla (\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$.

*** s. 3, 1.

In diesem Fall sind also Stromlinie und Feldlinien parallel. Aus Gl. (9) bzw. aus Gl. (25) erhält man dann wiederum:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = \text{const.} \quad (27)$$

Während jedoch im Fall a) die Konstante im allgemeinen von Stromlinie zu Stromlinie verschieden sein kann, hat sie hier im ganzen von Flüssigkeit und Feld erfüllten Raum den gleichen Wert.

Ferner ergibt sich aus Gl. (29):

$$\frac{w^2}{2} = \frac{B^2}{8\pi\mu\varrho} \quad (30)$$

Die kinetische Energie je Volumeneinheit ist also überall gleich der magnetischen Energiedichte, und aus Gl. (28) ergibt sich, daß die Maxwell'schen Spannungen des magnetischen Feldes mit der Komponente der „hydrodynamischen Spannungen“ im Gleichgewicht stehen, die normal auf die Stromlinien steht*.

4. Mit Gl. (29) erhält man eine interessante Lösung der magnetohydrodynamischen Gleichungen für das ebene Problem. Bei Abwesenheit eines magnetischen Feldes ist die bekannte Kármánsche Wirbelstraße eine Lösung der Gleichungen der Hydrodynamik. Bekanntlich ist eine Anordnung von ebenen Potentialwirbeln, wie sie in Abbildung 1 gezeichnet ist, im kleinen stabil, wenn

$$\sin \frac{\pi h}{l} = \sin \frac{\pi d}{l} \quad (31)$$

gilt und wenn weiters die Wirbel im gezeichneten Sinn drehen, und der Betrag der Wirbelstärke Γ bei allen Wirbeln derselbe ist**. Der Fall $d = \frac{l}{2}$, der in der klassischen

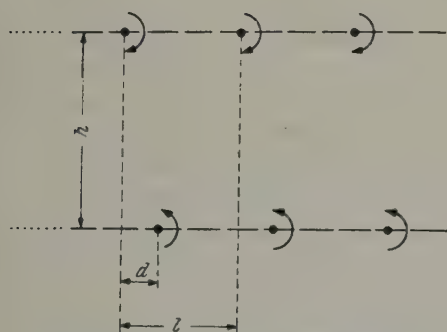


Abb. 1. Kármánsche Wirbelstraße

Arbeit von Kármán untersucht wurde**, zeichnet sich dadurch aus, daß sich die Wirbelstraße, d. h. die ganze Wirbelanordnung, in ihrer Längsrichtung bewegt, wenn die Flüssigkeit im Unendlichen ruht. In allen anderen Fällen erfolgt die Fortbewegung der Wirbelstraße in schräger Richtung***.

Es läßt sich nun zeigen, daß die Gleichungen der Magnetohydrodynamik im stationären inkompressiblen Fall in der Ebene gleichfalls eine solche im kleinen stabile Lösung besitzen, wenn zusätzlich in Richtung der Wirbelfäden Ströme bestimmter Größe fließen. Nimmt man nämlich an, daß für jeden

einzelnen Wirbel Gl. (29) gilt, was zulässig ist****, dann müssen in den Wirbelfäden Ströme von der Stärke $J = \oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{4\pi\mu\varrho} \cdot \Gamma$ fließen. Die Stabilitätsuntersuchung erfolgt dann analog wie bei der Kármánschen Wirbelstraße ohne Feld, da nur überall für $\Gamma = \frac{\mu J}{\sqrt{4\pi\mu\varrho}}$ zu setzen ist. Es wird daher an den Ergebnissen nichts geändert. Unter obigen Bedingungen ist also eine solche Wirbelanordnung mit Einzelströmen im kleinen stabil.

* Über die Realisierung derartiger Strömungen, die im kleinen stabil sind, s. 1, 3.

** s. 4, 5.

*** s. 5.

**** Gl. (29) ist eine stationäre Lösung. Das Geschwindigkeitsfeld der Kármánschen Wirbelstraße ist instationär, während hingegen das Feld jedes sie erzeugenden Einzelwirbels stationär ist.

5. Gl. (11) besagt, daß bei Abwesenheit irreversibler Prozesse die substantielle Änderung der Entropie gleich Null ist. Beschränkt man sich auf den stationären Fall, so ist dann die Entropie längs der Stromlinien konstant. Sie kann aber noch von Stromlinie zu Stromlinie verschieden sein. Es läßt sich nun ähnlich wie in der Hydrodynamik der reibungsfreien Flüssigkeit eine Beziehung zwischen dem Entropiegradienten und der Rotation des Geschwindigkeitsvektors finden*, wobei noch ein Zusatzglied auftritt, das vom elektromagnetischen Feld herrührt. Bei Abwesenheit irreversibler Prozesse kann im ersten Hauptsatz geschrieben werden:

$$\begin{aligned} dq &= dq_{rev} = T ds \\ dq &= T ds = di - \frac{dp}{\varrho} \end{aligned} \quad (32)$$

unter Verwendung von Gl. (9) erhält man dann, da $ds = dt \nabla s$ usw.:

$$T \nabla s = \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \left(i + \frac{w^2}{2} \right) - w \times (\nabla \times w) + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) \quad (33)$$

Bei Beschränkung auf stationäre Vorgänge ist $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ und man erhält den verallgemeinerten Satz von Crocco:

$$T \nabla s = \nabla \left(i + \frac{w^2}{2} \right) - w \times (\nabla \times w) + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B}) \quad (34)$$

Ist $\nabla s = 0$, die Entropie also im ganzen Raum konstant, und ist ferner $\nabla \left(i + \frac{w^2}{2} \right) = 0$, die Strömung also auch noch isoenergetisch, dann läßt sich Gl. (34) folgendermaßen formulieren:

Bei einer isotropen isoenergetischen Strömung sind (abgesehen von den Sonderfällen $w \times \nabla \times w = 0$, $\mathfrak{B} \times \nabla \times \mathfrak{B} = 0$) Stromlinien und Feldlinien einander parallel. [vgl. Gl. (28)]. Ist $\mathfrak{B} \parallel \nabla \times \mathfrak{B}$, übt also das Feld auf die Flüssigkeit keine Kraft aus, dann ist die Strömung wirbelfrei (ausgenommen wenn $w \parallel \nabla \times w$). Wie die Gleichungen der Hydrodynamik, haben auch die Gleichungen der Magnetohydrodynamik für ideale Medien unstetige Lösungen, wo Größen des Mediums und des Feldes Unstetigkeitsflächen besitzen. Während es in der Hydrodynamik aber nur zwei Arten solcher Unstetigkeiten gibt, nämlich tangentielle Sprungflächen und Stoßwellen, liegen die Verhältnisse in der Magnetohydrodynamik viel komplizierter. Genauere Untersuchungen zeigen**, daß es hier vier verschiedene Unstetigkeiten gibt, die ineinander übergehen können, was bekanntlich in der Hydrodynamik nicht möglich ist***.

Insbesondere gibt es die Verallgemeinerung des „schiefen Stoßes“, wobei die Stoßfront keine ausgezeichnete Lage gegenüber Geschwindigkeit und Feld besitzt. Für diesen Fall folgt, daß nach einer gekrümmten Stoßfront $\nabla s \neq 0$, auch wenn vorher $\nabla s = 0$ war, so daß sich aus Gl. (34) folgern läßt, daß nach einer gekrümmten Stoßfront $w \times (\nabla \times w) \neq \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \mathfrak{B} \times (\nabla \times \mathfrak{B})$ ist, wenn dies auch vorher der Fall war. Wenn nach dem Stoß $\mathfrak{B} \parallel \nabla \times \mathfrak{B}$ ist, das Feld also auf das Medium keine Kraft ausübt (dies ist eine der vier erwähnten Möglichkeiten), dann ist also die Strömung nach dem Stoß nicht wirbelfrei.

Literatur

- ¹ S. J. Syrovatskij: Magnetohydrodynamik. Fortschritte der Physik Bd. 6, 437—503 (1958).
² F. Hoffmann, E. Teller: Phys. Rev. 80, 692 (1950).

* S. 11, 12.

** S. 2, 6, 7, 1.

*** S. z. B. 8.

- ³ S. Chandrasekhar: Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, 1 (1956).
⁴ Th. v. Kármán und H. Rubach: Phys. Z. **13**, 49 (1912).
⁵ A. W. Maue: Z. ang. Math. u. Mech. **20**, 129 (1940).
⁶ H. F. Helfer: Astrophys. J. **117**, 177 (1953).
⁷ R. Lüst: Naturforsch. **8a**, 277 (1953).
⁸ Kotschin, Kibel, Rose: Theoretische Hydromechanik, Vol. II. Akademie Verl. Berlin. 1955.
⁹ T. G. Cowling: Magnetohydrodynamics. Intersc. Publ. N. Y. 1957.
¹⁰ E. A. Friemann, R. M. Kulrud, Th. v. Kármán and H. L. Dryden: Advances in Applied Mechanics, S. 195–231. Vol. 5, Ac. Press, Inc. New York, 1958.
¹¹ K. Oswatitsch: Gasdynamik, Wien: Springer. 1952.
¹² Ascher H. Shapiro: The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, Vol. I. Ronald Press, Comp. New York, 1953.

(Eingelangt am 25. Februar 1959)

Die Membranspannungen in Kegelschalen

Von E. Tschech, Graz

Mit 3 Textabbildungen

Im folgenden wird gezeigt, daß man, wie im Falle der von allgemeinen Lasten beanspruchten Kreiskegelschale, auch für den Fall der beliebigen Kegelschale unter allgemeiner Lastverteilung die vollständige Lösung sehr einfach anschreiben kann. Es zeigt sich nämlich, daß auch bei der Membrantheorie der allgemeinen Kegelschalen, wie bei der Membrantheorie der Zylinderschalen, es möglich ist, die drei Gleichgewichtsgleichungen für eine allgemeine Lastverteilung der Reihe nach aufzulösen.

Die Abb. 1 zeigt die Mittelfläche einer beliebigen Kegelschale. Als Koordinatenlinien auf dieser sollen die sich rechtwinkelig durchsetzenden Krümmungslinien gewählt sein. Diese Krümmungslinien sind hier einerseits die Mantelstrahlen des Kegels und andererseits die Kreise, die sich in der Abwicklung um die Kegelspitze zeichnen lassen. Die letzteren sind nur für den Kreiskegel ebene Kurven, für einen beliebigen Kegel sind sie Raumkurven auf der Fläche. Für die folgende Rechnung sollen die Bogenlängen s_1 und s_2 die Kurvenparameter der Krümmungslinien sein. Mit n_1, κ_1 seien die Normalkrümmung und die geodätische Krümmung der s_1 -Linien (Mantelstrahlen) und mit n_2, κ_2 diese Krümmungen für die s_2 -Linien bezeichnet. Die geodätische Torsion für die Krümmungslinien ist ja gleich null und n_1 und n_2 stellen die Hauptkrümmungen an jeder Stelle der Fläche dar. Für unsere Kegelschale ist $n_1 = 0$ und $\kappa_1 = 0$.

Setzt man die Gleichgewichtsbedingungen für die Membrankräfte an einer Stelle der Kegelschale an dem dort durch die Krümmungslinien gebildeten rechtwinkligen Flächenelement an, also das Gleichgewicht der Membrankräfte gegen Verschieben in s_1 -Richtung und s_2 -Richtung und das Gleichgewicht normal zur Schale, so erhält man¹

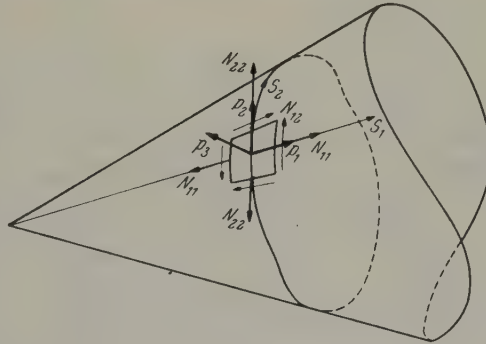


Abb. 1. Die beliebige Kegelschale

¹ B. Baule: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Bd. VII.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} + \kappa_2 (N_{22} - N_{11}) &= -p_1, \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2} - 2 \kappa_2 N_{12} &= -p_2, \\ n_2 N_{22} &= p_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

N_{11} und N_{22} sind die Längskräfte in Richtung s_1 und s_2 , N_{12} sind dort die Schubkräfte, p_1, p_2, p_3 sind die an der Flächeneinheit der Schalenmittelfläche wirkenden äußeren Lastkomponenten in den Richtungen s_1, s_2 und der Flächennormalen. Die Lastkomponenten seien allgemeine Funktionen der Parameter s_1 und s_2 .

Die drei Gleichungen (1) lassen sich nacheinander lösen. Die dritte Gleichung ergibt N_{22} lediglich abhängig von der Normalbelastung p_3

$$N_{22} = \frac{p_3}{n_2}. \quad (2a)$$

Sie ist durch Randbedingungen nicht beeinflussbar. Nun kann die zweite Gleichung von (1) gelöst werden

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial s_1} - 2 \kappa_2 N_{12} = -p_2 - \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2}.$$

Die geodätische Krümmung κ_2 ist ²

$$\kappa_2 = -\frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial s_1},$$

wenn mit $E, G, F = 0$ die ersten Fundamentalgrößen bezeichnet sind. Damit geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{1}{G} \cdot \frac{\partial (N_{12} G)}{\partial s_1} = -p_2 - \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2},$$

woraus N_{12} folgt

$$N_{12} \cdot G = -\int G \left(p_2 + \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2} \right) ds_1 + c_1(s_2). \quad (2b)$$

Wenn man nun N_{12} kennt, so kann man die erste Gleichung von (1) unmittelbar integrieren

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} - \kappa_2 N_{11} = -p_1 - \kappa_2 N_{22} - \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2},$$

oder mit $\kappa_2 = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial s_1}$

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial (N_{11} \sqrt{G})}{\partial s_1} = -p_1 - \kappa_2 N_{22} - \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2},$$

woraus N_{11} folgt

$$\sqrt{G} \cdot N_{11} = -\int \sqrt{G} \left(p_1 + \kappa_2 N_{22} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} \right) ds_1 + c_2(s_2) \quad (2c)$$

Die Gleichungen (2) stellen die Lösung der Membrantheorie beliebiger Kegelschalen mit allgemeiner Belastung dar. Die Funktionen $c_1(s_2)$ und $c_2(s_2)$ sind aus den Randbedingungen zu bestimmen. Sie eignen sich z. B. dazu längs zweier Ränder s_1 konstant den N_{11} -Verlauf vorzuschreiben oder längs eines Randes s_1 konstant den Verlauf von

² M. Lagally: Vorlesungen über Vektorrechnung.

N_{11} und N_{12} festzulegen. Nebenbei sei bemerkt, daß Ränder s_1 konstant bei einer beliebigen Kegelschale keine ebenen Kurven sind.

Auf die Lösungen der allgemeinen Zylinderschalen kommt man sogleich, wenn man wegen $\kappa_2 = 0$ die Fundamentalgröße G nur mehr als Funktion von s_2 anzusehen hat, und sie daher aus den Gleichungen (2) streichen kann

$$\begin{aligned} N_{22} &= \frac{p_3}{n_2}, \\ N_{12} &= - \int \left(p_2 + \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2} \right) ds_1 + f_1(s_2), \\ N_{11} &= - \int \left(p_1 + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} \right) ds_1 + f_2(s_2). \end{aligned}$$

Es kann zweckmäßig sein, die Kegelgleichungen (2) statt auf die Bogenlängen der Krümmungslinien auf beliebige Parameter u und v dieser Linien zu beziehen. Die u -Linien und die v -Linien bilden nunmehr das orthogonale Netz der Krümmungslinien als Koordinatenlinien auf der Kegelfläche. Die zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen heißen jetzt

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sqrt{G} N_{11})}{\partial u} - N_{22} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \sqrt{E} \frac{\partial N_{12}}{\partial v} + \sqrt{E G} \cdot p_1 &= 0, \\ \sqrt{E} \frac{\partial N_{22}}{\partial v} + \frac{\partial (\sqrt{G} N_{12})}{\partial u} + N_{12} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \sqrt{E G} \cdot p_2 &= 0, \\ N_{22} &= \frac{p_3}{n_2}, \end{aligned}$$

woraus wieder durch aufeinanderfolgendes Integrieren die vollständige Lösung folgt

$$\left. \begin{aligned} N_{22} &= \frac{p_3}{n_2}, \\ G N_{12} &= - \int G \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial N_{22}}{\partial v} + p_2 \right) \sqrt{E} du + g_1(v), \\ \sqrt{G} \cdot N_{11} &= - \int \sqrt{G} \left(p_1 + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial N_{12}}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{E G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} N_{22} \right) \sqrt{E} du + g_2(v). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$E, F = 0, G$ sind wieder die Fundamentalgrößen erster Art. Für den geraden Kreiskegel vereinfachen sich diese Gleichungen (Abb. 2). Für ihn ist

$$E = 1, \quad G = u^2 \sin^2 \alpha, \quad n_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{u \operatorname{tg} \alpha},$$

und damit sind für eine beliebige Flächenbelastung diese Membrankräfte

$$\begin{aligned} N_{22} &= p_3 u \operatorname{tg} \alpha, \\ N_{12} &= - \frac{1}{u^2} \int u^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial p_3}{\partial v} + p_2 \right) du + \frac{g_1(v)}{u^2 \sin^2 \alpha}, \\ N_{11} &= - \frac{1}{u} \int u \left\{ p_1 - p_3 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{u^3 \sin^2 v} \cdot \frac{d g_1(v)}{d v} - \frac{1}{u^3 \sin \alpha} \int u^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial^2 p_3}{\partial v^2} + \frac{\partial p_2}{\partial v} \right) du \right\} du + \\ &\quad + \frac{g_2(v)}{u \sin \alpha}. \end{aligned}$$

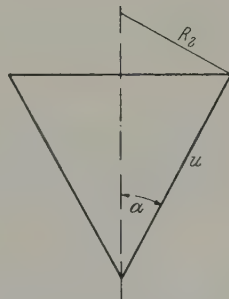


Abb. 2. Die gerade Kreiskegelschale

Als Anwendungsbeispiel für die Formeln (3) sei die Schnittkraftberechnung für eine schiefe Kreiskegelschale unter Innendruck durchgeführt. Die Ergebnisse werden mit denen von L. Föppl³ auf anderem Wege erhaltenen verglichen.

Handelt es sich um einen geraden Kreiskegel unter Innendruck, $p_3 = p$ und $p_1 = p_2 = 0$, so ergeben die früheren Gleichungen, wenn die Schale nicht im Scheitel, sondern an ihrem Rande passend unterstützt wird, die Werte

$$N_{22} = p \operatorname{tg} \alpha \cdot u, \quad N_{12} = 0, \quad N_{11} = \frac{1}{2} p \operatorname{tg} \alpha \cdot u = \frac{N_{22}}{2}.$$

Wir wenden uns nun der schiefen Kreiskegelschale zu, wie sie in der zitierten Arbeit von Föppl betrachtet wurde. Die Abb. 3 zeigt diesen schiefen Kegel im Auf- und Grundriß. Seine Gleichung bezogen auf das (xyz) -System ist

$$z = \frac{x^2 + y^2}{x} \operatorname{ctg} \beta.$$

Wir benötigen für die Anwendung unserer Formeln (3) die Parameterdarstellung dieser Kegelschale $\xi(u, v)$, wobei die u -Linien und die v -Linien die Krümmungslinien der Kegelschale sein müssen. Sie sind einerseits die Mantelstrahlen (u -Linien) und andererseits die Linien auf dem Kegel, die durch die Schnitte mit den um die Kegelspitze mit u als Radius gelegten Kugelschalen entstehen (v -Linien). Demnach lautet die Parameterdarstellung

$$\xi(u, v) = \begin{cases} u \frac{\cos^2 v}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v}} \\ u \frac{\sin v \cos v}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v}} \\ u \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v}} \end{cases}$$

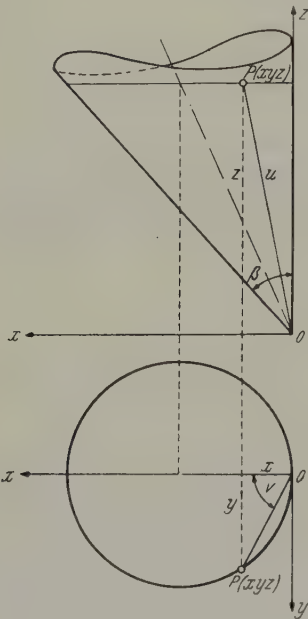


Abb. 3. Die schiefe Kreiskegelschale

Aus ihr ergibt sich

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^4 v}{(\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v)^2}, \quad L = 0, \quad M = 0,$$

und die noch notwendige Hauptkrümmung n_2

$$n_2 = \frac{N}{G} = \frac{2 \operatorname{ctg} \beta}{u} \left(\frac{\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v}{\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^4 v} \right)^{3/2}.$$

Die Formeln (3) nehmen für den Sonderfall der Belastung nur durch den Innendruck p die nachstehende Form an

$$\left. \begin{aligned} N_{22} &= p \cdot \frac{1}{n_2}, \\ N_{12} &= -\frac{1}{3} p u \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \left(\frac{1}{n_2} \right)}{\partial v}, \\ N_{11} &= \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{n_2} + \frac{p}{6} u^2 \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \left(\frac{1}{n_2} \right)}{\partial v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

³ L. Föppl: Schiefe Kreiskegelschale unter Innendruck, aus den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Setzt man darin die für die Fundamentalgrößen und für die Hauptkrümmung erhaltenen Werte ein, so bekommt man das Ergebnis

$$\begin{aligned} N_{22} &= \frac{1}{2} p \operatorname{tg} \beta u \left(\frac{\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^4 v}{\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v} \right)^{1/2}, \\ N_{12} &= \frac{1}{2} p \operatorname{tg} \beta u \sin v \cos v \frac{\cos^2 v (\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v) - \operatorname{ctg}^2 \beta \sin^2 v}{(\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v)^{1/2}}, \\ N_{11} &= \frac{1}{2} p \operatorname{tg} \beta u \sin^2 v \cos^2 v \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \beta (\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v) + (\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^4 v)}{(\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^2 v)^{1/2} \cdot (\operatorname{ctg}^2 \beta + \cos^4 v)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von L. Föppl erhaltenen vollkommen überein. Bemerkt sei dazu noch, daß obiger Ausdruck für N_{12} , wie es sein muß, gleich Null wird für die beiden Symmetrieebenen dieses geraden elliptischen Kegels, nämlich für $v = 0$ [(xz)-Ebene] und für $v = v_0$ bei

$$\operatorname{tg} v_0 = \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta/2} - 1 \right)^{1/2},$$

dies ist der Mantelstrahl für die Ebene durch die Kegelachse (im Aufriß der Abb. 3 die Winkelhalbierende von β und nicht die eingezeichnete Verbindungslinie des Kreisschnittmittelpunktes mit 0) senkrecht zur (xz)-Ebene. Weiters erkennt man aus den Formeln (4) daß für $\frac{1}{n_2} = \text{konst.}$ die Formeln des geraden Kreiskegels unter dem Innendruck p herauskommen.

(Eingelangt am 18. Februar 1959)

On the linearized mathematical representation of the flow in axial compressors*

By M. Z. v. Krzywoblocki, University of Illinois

With 1 Figure

Summary. In the present paper the following assumptions are made: The flow inside an axial compressor is rotational, the fluid is inviscid and non-heat conducting. External forces may exist and heat may be added or subtracted to (or from) the fluid. It is also assumed that the fluid entering the rotor is subject to some disturbances due to the forces exerted upon the fluid by the rotor (and vice versa), some heat addition, etc., and the fact that the velocity components, pressure, density, etc., are supposed to be composed of two parts: the incoming velocity components plus the superimposed disturbance velocity components.

From these assumptions the author derives the general linearized equations of motion, energy and continuity in three-dimensional, non-orthogonal curvilinear coordinate system. A brief discussion of the possible methods of solution of the resultant system closes the paper.

Introduction

Let us restrict the domain of consideration to a flow inside an axial compressor in the rotor blade space, where external forces are present and heat addition from the outside takes place. The fluid is taken to be inviscid and non-heat conducting, but the

* The analytical investigation contained in the present work was performed by the author during his association with the Compressor Aerodynamic Design and Development Unit, General Electric Co., Cincinnati, Ohio, U.S.A., in the years 1956/57. The problem of the linearization of the equations governing the motion of a gaseous medium inside axial compressors arose during numerous discussions between the author and Mr. R. A. Novak, the Supervisor of this unit, on the subject of a rational aerodynamic theory of axial compressors. The author wishes to express his deep appreciation and acknowledgment to Mr. R. A. Novak for his kind consideration regarding that so interesting and relatively new subject, as well as for his liberal attitude towards the emphasis of the influence of the rational aerodynamic theory upon the general performance of compressors.

flow is rotational. In the case of a steady flow one may introduce the notion of a streamline along which the stagnation enthalpy and the entropy have variable values. These values may vary from streamline to streamline.

Assume that the body of the fluid inside the rotor blades constitutes a part of a large body of the fluid extending on both sides of that space. Each rotor blade space body of the fluid may belong to a different large body of the fluid extending to the right and to the left of the rotor blade space in question, or one may attempt to construct a large fluid body containing all the rotor blade space fluid bodies in a compressor. In any case, it is sufficient to consider only one such large body of the fluid, which, in general is a body of rotation due to the internal shape of the compressor.

In the case of steady flow, and the axial symmetry of the characteristic kinetic (i. e., velocity and density) and thermodynamic (i. e., temperature and pressure) properties of the fluid in the inlet cross-section, one may assume that the large body of the fluid consists of infinitely thin annular surfaces (surfaces of rotation) located one on each other. Each of these surfaces is characterized by some value of the stagnation enthalpy and some value of the entropy over its entire area. These may be called entropy surfaces or stream-surfaces. The streamlines of the same value of the stagnation enthalpy and of the entropy are located on one and the same stream-surface.

In the case of nonsteady conditions or axially un-symmetrical distribution in the inlet cross-section of the kinetic and thermodynamic properties of the fluid flow, the flow pattern is much more complicated. The geometrical shape of the body of the fluid, when taking into account the largest radius in each cross-section normal to the longitudinal axis of the compressor, is always a body of rotation; but the streamlines located on this same stream-surface may have different values of stagnation enthalpy and entropy, depending upon an axially un-symmetrical distribution of these properties in the inlet cross-section. A stream-surface, originated on the perimeter of one and the same circle in the inlet cross-section, may not be necessarily a surface of rotation. Due to the axially un-symmetrical distribution in the inlet cross-section of the characteristic properties of the fluid flow, the surface in question may be subject to some kind of "warping".

It is questionable whether, regardless of a symmetrical or un-symmetrical distribution in the inlet cross-section of the characteristic properties of the fluid flow, it is always advantageous to assume the origin of the surfaces in question on the perimeters of the circles in the inlet cross-section. The streamlines located on the stream-surface are some kind of three-dimensional helical curves; in some particular cases they may be plane curves located in meridional planes.

Assume, for the illustrative purposes, an axially symmetrical character of stream-surfaces with known values of stagnation enthalpy and entropy on each of them. In this case it is enough to consider only a meridional cross-section of such a stream-surface.

Assume that a point P, located on such a meridional curve, is described by means of coordinates in a cylindrical coordinate system with the axis of the cylinder coinciding with the longitudinal axis of the compressor, and regard these coordinates of P to be known and given. Assume also a non-orthogonal, curvilinear "running" coordinate system, attached to the point P, moving along the meridional curve.

The purpose of the present paper is to describe, from a mathematical standpoint, the instantaneous motion of the fluid in terms of the "running" coordinates.

It is assumed that the fluid entering the rotor is subject to some disturbances due to forces exerted upon the fluid by the rotor and vice versa, some heat addition, etc., and the fact that the velocity components, pressure, density, etc., are supposed to be

composed of two parts; the incoming velocity components plus the superimposed disturbance velocity components. In the equations there are preserved only the terms containing the first powers of the disturbed velocity components.

A discussion on the general aspects of the resulting system of equations and some particular case closes the paper.

1. Fundamental Notions

1.1. Fundamental Equations

Assume a flow of an inviscid, non-heat-conducting gaseous medium described by the following system of equations:

$$\vec{q}_{,t} + \vec{q} \cdot \nabla \vec{q} + \varrho^{-1} \nabla p = \vec{P}, \quad (1.1.1)$$

$$\varrho_{,t} + \nabla \cdot (\varrho \vec{q}) = 0, \quad (1.1.2)$$

$$p_0^{-1} p = (\varrho_0^{-1} \varrho)^\gamma \exp [c_v^{-1} (S - S_0)], \quad (1.1.3)$$

where the vector $\vec{P}$ denotes the external force per unit mass, $\vec{q}$ the velocity and S the entropy. From the first law of thermodynamics written in the form $dQ = T dS = c_v dT + p d(\varrho^{-1})$, with $h = c_p T = c_v T + p p^{-1}$, $c_v = \text{const.}$, one obtains the vector equation:

$$T \nabla S - \nabla h + \varrho^{-1} \nabla p = 0; \quad T \nabla S = \nabla Q. \quad (1.1.3a)$$

By adding on both sides of equation (1.1.1) the expression $\vec{q} \times (\nabla \times \vec{q})$, contracting on the left hand side and using eq. (1.1.3a), one obtains Crocco's equation:

$$\vec{q}_{,t} + \nabla H - T \nabla S = \vec{q} \times \vec{\omega} + \vec{P}; \quad (1.1.4)$$

$$H = \frac{1}{2} \vec{q}^2 + h, \quad \vec{\omega} = \text{curl } \vec{q}; \quad (1.1.5)$$

let:

$$h_1 = \int \varrho^{-1} dp = \int \varrho^{-1} c^2 d\varrho + (\gamma - 1) Q = h - Q, \quad (1.1.6)$$

with

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{S = \text{const.}}, \quad (1.1.7)$$

denoting the local velocity of sound.

Let us put the continuity equation in the form:

$$\varrho_{,t} + \vec{q} \cdot \nabla \varrho + \varrho \nabla \cdot \vec{q} = 0, \quad (1.1.8)$$

and the factor $\nabla \varrho$ in the form of $c^{-2} \nabla p - c^{-2} (\gamma - 1) \varrho \nabla Q$; multiply scalarly the equation of motion by $(\vec{q} \cdot)$ and calculate from it the expression $\varrho^{-1} \vec{q} \cdot \nabla p$; insert this expression into the equation of continuity and integrate the latter with respect to time t , thus obtaining:

$$\begin{aligned} \int c^2 \varrho^{-1} \varrho_{,t} dt = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \right)^2 \right] + \vec{q} \cdot (\vec{q} \cdot \nabla \vec{q}) - \vec{q} \cdot \vec{P} - c^2 \nabla \cdot \vec{q} \\ + (\gamma - 1) \vec{q} \cdot \nabla Q] dt. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Differentiate partially Crocco's equation with respect to time, calculate from eq. (1.1.9) the expression $\frac{\partial}{\partial t} \nabla h$ and combine it with the transformed Crocco's equation, using the identity:

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla. \quad (1.1.10)$$

This gives the result:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla (\vec{q}^2)] + \nabla [\vec{q} \cdot (\vec{q} \cdot \nabla \vec{q})] - \nabla (\vec{q} \cdot \vec{P}) \\ - \nabla [c^2 \nabla \cdot \vec{q}] + (\gamma - 1) \nabla \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{q} \times (\nabla \times \vec{q})] + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Eq. (1.1.11) may serve to derive some particular cases:

(i) Homentropic, irrotational flow with no external force and with $\vec{q} = \nabla \Phi$, i. e., $\nabla S \equiv \nabla \times \vec{q} \equiv 0$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi)^2 + \nabla \Phi \cdot (\nabla \Phi \cdot \nabla \nabla \Phi) - c^2 \nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.1.12)$$

This is identical with eq. (1.4.6) in Ward's book [1, p. 9].

(ii) Steady, rotational flow:

$$\vec{q} \cdot (\vec{q} \cdot \nabla \vec{q}) - c^2 \nabla \cdot \vec{q} - \vec{q} \cdot \vec{P} + (\gamma - 1) \vec{q} \cdot \nabla Q = 0. \quad (1.1.13)$$

1.2. Other Forms

Assume a steady, rotational diabatic flow with an external force $\vec{P}$; then the equation of the conservation of momentum along a streamline has the form:

$$q \frac{dq}{ds} + q^{-1} \frac{dp}{ds} - P_s = 0. \quad (1.2.1)$$

This integrated along a streamline furnishes a generalized Bernoulli equation:

$$\frac{1}{2} q^2 + (\gamma - 1)^{-1} c^2 - \int_0^s \vec{P} \cdot d\vec{\sigma} - \int_0^s dQ = \text{const.} \quad (1.2.2)$$

Assume that a particle moves along an arc $[O - s_1]$ of the streamline subject to no forces; the velocity in that part of the motion is denoted by symbol $\vec{C}$; in the interval $[s_1 - s]$ of the same streamline the particle is subject to the action of a force $\vec{P}$. Then one has:

$$\frac{1}{2} C^2 + (\gamma - 1)^{-1} c_0^2 = \frac{1}{2} q^2 + (\gamma - 1)^{-1} c^2 - \int_{s_1}^s \vec{P} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{s_1}^s T dS. \quad (1.2.3)$$

Calculate c^2 from eq. (1.2.3) and insert it into eqs. (1.1.13) and (1.1.4), with $\vec{q}_{,t} = 0$ and with $\gamma \bar{R} T = c^2$; this furnishes:

$$\begin{aligned} c_0^2 \nabla \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{q}^2 \right) + \left[\frac{1}{2} (\gamma - 1) (\vec{q}^2 - \vec{C}^2) - (\gamma - 1) \int_{s_1}^s \vec{P}_1 \cdot d\vec{\sigma} \right] \nabla \cdot \vec{q} \\ - \vec{q} \cdot \vec{P} + (\gamma - 1) \vec{q} \cdot \nabla Q; \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\nabla H - (\gamma \bar{R})^{-1} \left[c_0^2 - \frac{1}{2} (\gamma - 1) (\vec{q}^2 - \vec{C}^2) - (\gamma - 1) \int_{s_1}^s \vec{P}_1 \cdot d\vec{\sigma} \right] \nabla S = \vec{q} \times \vec{\omega} + \vec{P}. \quad (1.2.5)$$

The physical components of the vector $\vec{X}$ are X_r, X_u, X_m , and the contravariant components $X_r, R^{-1} X_u, R_m^{-1} X_m$.

Apply the operator curl (see Appendix) to $\text{grad } \Phi_i$; in view of equation (1.3.6) this gives:

$$\vec{a}_1: (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [R_m (X_r \sin \varphi + X_m)] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R X_u) \right\} = \omega_r; \quad (1.3.7)$$

$$\vec{a}_2: (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (X_r + X_m \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m (X_r \sin \varphi + X_m)] \right\} = R^{-1} \omega_u; \quad (1.3.8)$$

$$\vec{a}_3: (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (R X_u) - \frac{\partial}{\partial \theta} [X_r + (\sin \varphi) X_m] \right\} = R_m^{-1} \omega_m. \quad (1.3.9)$$

Assuming that we know ω_i ($i = r, u, m$), we can calculate the components of $\vec{X}$ from the set of equations (1.3.7), (1.3.8), 1.3.9); and vice versa knowing (X_r, X_u, X_m) we can calculate $(\omega_r, \omega_u, \omega_m)$.

1.4. Flow with Perturbations

Assume that the total flow consists of the incoming flow (Φ_i, X_i) and of the superimposed perturbation flow (Φ_d, X_d) , so that:

$$\vec{q}_i \equiv \vec{C} = \text{grad } \Phi_i + \vec{X}_i = \text{grad } (\Phi_i + \Phi_d) + (\vec{X}_i + \vec{X}_d) = \vec{q}_i + \vec{q}_d; \quad (1.4.1)$$

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_d; \quad \vec{q}_i = \text{grad } \Phi_i + \vec{X}_i, \quad \vec{q}_d = \text{grad } \Phi_d + \vec{X}_d. \quad (1.4.2)$$

Various expressions appearing in equations (1.2.4) and (1.2.5) are collected in the Appendix. Let us insert these expressions into the equations (1.2.4) and (1.2.5) preserving the following rules:

(i) All the terms referring only to the incoming flow satisfy, by themselves, equations (1.2.4) and (1.2.5), and consequently are excluded;

(ii) Only terms linear in $\vec{q}_d \equiv (\nabla \Phi_d + X_d)$ are retained;

(iii) The velocity $\vec{C}$ in equations (1.2.4) and (1.2.5) is identified with the velocity of the incoming flow, $\vec{q}_i$; i. e., $\vec{q}_i \equiv \vec{C}_i$;

(iv) The velocity of sound c^2_0 refers to $\vec{q}_i$, i. e., $c^2_0 = \gamma \bar{R} T_i$.

With these assumptions the linearized form of equation (1.2.4) is:

$$\begin{aligned} \gamma \bar{R} T_i \nabla \cdot \vec{q}_d &= \frac{1}{2} \vec{q}_d \cdot \nabla (\vec{q}_i^2) + \vec{q}_i \cdot \nabla (\vec{q}_i \cdot \vec{q}_d) + (\gamma - 1) (\vec{q}_i \cdot \vec{q}_d) \nabla \cdot \vec{q}_i \\ &\quad - (\gamma - 1) \int_{s_1}^s \vec{P}_d \cdot d\vec{\sigma} \nabla \cdot (\vec{q}_i + \vec{q}_d) - (\gamma - 1) \int_{s_1}^s \vec{P}_i \cdot d\vec{\sigma} \nabla \cdot \vec{q}_d \\ &\quad - \vec{q}_d \cdot \left[\vec{P}_i - (\gamma - 1) \nabla Q_i \right] - (\vec{q}_i + \vec{q}_d) \cdot \left[\vec{P}_d - (\gamma - 1) \nabla Q_d \right] \\ &\quad - (\gamma - 1) \left[\int_{s_1}^s (T dS) \nabla \cdot \vec{q} - \int_{s_1}^s T_i dS_i \nabla \cdot \vec{q}_i \right], \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

with

$$\vec{q}_i = \nabla \Phi_i + \vec{X}_i; \quad \vec{q}_d = \nabla \Phi_d + X_d; \quad \vec{q}_i \equiv \vec{C}_i; \quad (1.4.4)$$

the linearized form of equation (1.2.5) is:

$$\begin{aligned} \nabla H_d - T \nabla S_d + (\gamma \bar{R})^{-1} (\gamma - 1) \left\{ \left[(\vec{q}_i \cdot \vec{q}_d) + \int_{s_1}^s \vec{P}_d \cdot d\vec{\sigma} \right] \nabla S + \int_{s_1}^s \vec{P}_i \cdot d\vec{\sigma} (\nabla S_d) \right\} \\ - c_p^{-1} \left[\int_{s_1}^s T dS \nabla S - \int_{s_1}^s T_i dS_i \nabla S_i \right] = \vec{q}_i \times \vec{\omega}_d + \vec{q}_d \times \vec{\omega}_i + \vec{P}_d, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

with

$$\nabla S = \nabla S_i + \nabla S_d; T = T_i + T_d. \quad (1.4.6)$$

One can make a bold assumption in the linearization of equations (1.2.4) and (1.2.5) namely, one can assume that the velocity of sound, c^2 , in the disturbed region is equal to the velocity of sound in the incoming flow, c_0^2 , (see equation [1.2.3]). A justification of this assumption follows the same pattern as that known in the theory of the linearized potential equation. In this case, as one can easily verify, one has to neglect all the terms having the coefficient $(\gamma - 1)$ in equations (1.2.4), (1.2.5), (1.4.3) and (1.4.5), except those containing the gradients of $Q_i (= \nabla Q_i)$ and of $Q_d (= \nabla Q_d)$ not under the integral signs.

2. Scalar Forms of the Linearized Equations

2.1. Basic Expressions

All the basic expressions occurring in the scalar forms of the linearized equations in the $\{r, \theta, \varphi; R_m\}$ -system of coordinates are collected in the Appendix.

2.2. Scalar Forms of the Linearized Equations

In the $\{r, \theta, \varphi; R_m\}$ -system of coordinates the equations (1.4.3) (which is a scalar equation) and (1.4.5) (which is a vector equation) take the following scalar forms:

$$\begin{aligned} \gamma \bar{R} T_i (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ [R R_m (\cos \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} - R \sin \varphi (\cos \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + R R_m (\cos \varphi) X_{dr}]_{,r} \\ + [R_m R^{-1} (\cos \varphi) \Phi_{d,\theta} + R_m (\cos \varphi) X_{du}]_{,\theta} + [-R (\sin \varphi) (\cos \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} \\ + R (R_m \cos \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + R (\cos \varphi) X_{dm}]_{,\varphi} \} = \frac{1}{2} \{ [(\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} \\ + X_{dr}] (C_i^2)_{,r} + (R^{-2} \Phi_{d,\theta} + R^{-1} X_{du}) (C_i^2)_{,\theta} + [-\sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} \\ + (R_m \cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,\varphi} + R_m^{-1} X_{dm}] (C_i^2)_{,\varphi} \} + C_{ri} I_{,r} + R^{-1} C_{ui} I_{,\theta} + R_m^{-1} C_{mi} I_{,\varphi} \\ + (\gamma - 1) I (R R_m \cos \varphi)^{-1} [(R R_m \cos \varphi C_{ri})_{,r} + (R_m C_{ui} \cos \varphi)_{,\theta} + (R \cos \varphi C_{mi})_{,\varphi}] \\ - (\gamma - 1) (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ [R R_m \cos \varphi (C_{ri} + X_{dr}) + R (\cos \varphi)^{-1} (R_m \Phi_{d,r} \\ - (\sin \varphi) \Phi_{d,\varphi})]_{,r} + [R_m \cos \varphi (C_{ui} + R^{-1} \Phi_{d,\theta} + X_{du})]_{,\theta} + [R \cos \varphi (C_{mi} + X_{dm} \\ - R (\cos \varphi)^{-1} (\sin \varphi) \Phi_{d,r} - R_m^{-1} \Phi_{d,\varphi})]_{,\varphi} \} \{ I_d + \int_{s_1}^s [(P_{rd} + P_{md} \sin \varphi) dr + R P_{ud} d\theta \\ + R_m (P_{rd} \sin \varphi + P_{md}) d\varphi] - (\gamma - 1) (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ [R R_m (\cos \varphi) X_{dr} \\ + R (\cos \varphi)^{-1} (R_m \Phi_{d,r} - \sin \varphi) \Phi_{d,\varphi}]_{,r} + [R_m \cos \varphi (R^{-1} \Phi_{d,\theta} + X_{du})]_{,\theta} + [R (\cos \varphi) X_{dm} \\ - R (\cos \varphi)^{-1} (\sin \varphi) \Phi_{d,r} - R_m^{-1} \Phi_{d,\varphi}]_{,\varphi} \} \{ I_i + \int_{s_1}^s [(P_{ri} + P_{mi} \sin \varphi) dr \\ + R P_{ui} d\theta + R_m (P_{ri} \sin \varphi + P_{mi}) d\varphi] - (\Phi_{d,r} + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi) P_{ri}^{(1)} \\ - (R^{-1} \Phi_{d,\theta} + X_{du}) P_{ui}^{(1)} - (R_m^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr} \sin \varphi + X_{dm}) P_{mi}^{(1)} - [C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi + \Phi_{d,r} \\ + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi] P_{rd}^{(1)} - [C_{ui} + R^{-1} \Phi_{d,\theta} + X_{du}] P_{ud}^{(1)} - [C_{ri} \sin \varphi + C_{mi} \\ + R_m^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr} \sin \varphi + X_{dm}] P_{md} \} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

where

$$I = \{ C_{ri} (\Phi_{d,r} + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi) + R^{-1} C_{ui} (\Phi_{d,\theta} + R X_{du}) + R_m^{-1} C_{mi} [\Phi_{d,\varphi} + R_m (X_{dr} \sin \varphi + X_{dm})] \}, \quad (2.2.2)$$

and

$$C_i = (C_{ri}, C_{ui}, C_{mi}); P_{ri}^{(1)}, \text{ etc. given in the Appendix.} \quad (2.2.3)$$

C_i is the total incoming velocity (including the effects of vorticity). In case one assumes that the velocity of sound in the disturbed region is equal to the velocity of sound in the incoming stream, (see remarks at the end of section 1.4), some terms containing the coefficient $(\gamma - 1)$ should be omitted. The first scalar equation of the vector equation (1.4.5), using the contravariant components, has the form:

$$\begin{aligned}
 & (\cos^2 \varphi)^{-1} (H_{d,r} - T S_{d,r}) - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} (H_{d,\varphi} - T S_{d,\varphi}) \\
 & + c_p^{-1} \left\{ C_{ri} (\Phi_{d,r} + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi) + C_{ui} (R^{-1} \Phi_{d,\theta} + X_{du}) + C_{mi} (R_m^{-1} \Phi_{d,\varphi} \right. \\
 & + X_{dr} \sin \varphi + X_{dm}) + \left. \left\{ I_d + \int_{s_1}^s [(P_{rd} + P_{md} \sin \varphi) dr + R P_{ud} d\theta \right. \right. \\
 & + \left. \left. R_m (P_{rd} \sin \varphi + P_{md} d\varphi) \right] \right\} \cdot [(\cos^2 \varphi)^{-1} S_{,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} S_{,\varphi}] \\
 & + c_p^{-1} \left\{ \left\{ I_i + \int_{s_1}^s [(P_{ri} + P_{mi} \sin \varphi) dr + R P_{ui} d\theta + R_m (P_{ri} \sin \varphi \right. \right. \\
 & + \left. \left. P_{mi} d\varphi) \right] \right\} [(\cos^2 \varphi)^{-1} S_{d,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} S_{d,\varphi}] \right\} = p^1 + \bar{p}^1 + P_{rd}; \quad (2.2.4)
 \end{aligned}$$

there are two additional such equations for

$$[R^{-2} (H_{d,\theta} - T S_{d,\theta})] \text{ and}$$

$$[-\sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} (H_{d,r} - T S_{d,r}) + (R_m \cos \varphi)^{-2} (H_{d,\varphi} - T S_{d,\varphi})],$$

the used symbols denote:

$$H_d = \frac{1}{2} \vec{q}_d^2 + h_d = \frac{1}{2} \vec{q}_d^2 + c_p T_d; \quad (2.2.5)$$

$$S = S_i + S_d; \quad (2.2.6)$$

the values of p_i 's and p_i 's are given in the Appendix.

The system of equations: (2.2.1), (2.2.4) plus two additional equations represent a system of four partial differential equations in four unknown functions:

$$\Phi_d, X_{dr}, X_{du}, X_{dm}.$$

The knowledge of these functions allows one to calculate the resultant perturbation velocity components of $\vec{q}_d$:

$$\text{covariant: } \Phi_{d,r} + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi;$$

$$\Phi_{d,\theta} + R X_{du};$$

$$\Phi_{d,\varphi} + R_m (X_{dr} \sin \varphi + X_{dm});$$

$$\text{covariant: } (\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr};$$

$$R^{-2} \Phi_{d,\theta} + R^{-1} X_{du};$$

$$-\sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} + (R_m \cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,\varphi} + R_m^{-1} X_{dm}.$$

The knowledge of the functions X_{dr}, X_{du}, X_{dm} allows one to find the functions $\omega_{dr}, \omega_{du}, \omega_{dm}$ by the use of equations (1.3.7), (1.3.8) and (1.3.9) in which the functions $X_{dr}, X_{du}, X_{dm}; \omega_{dr}, \omega_{du},$ and ω_{dm} should be inserted.

In case one assumes that the velocity of sound in the disturbed region is equal to the velocity of sound in the incoming flow, the term containing the coefficient $c_p^{-1} = (\gamma - 1)(\gamma R)^{-1}$ in equation (2.2.4) should be omitted.

2.3. Diabatic Flow Conditions

By the term diabatic flow we understand the flow of an inviscid, non-heat conducting, perfect fluid into which heat is injected (or subtracted) by means of distributed

sources and sinks. The fundamental equations governing the diabatic flow are the first law of thermodynamics and the Euler equation of motion. From the first law of thermodynamics and the reasoning, performed in Section 1.1, it is clear that the effect of the heat addition is included in the magnitude of the entropy. The magnitude Q denotes the total amount of heat introduced into the particle of the fluid from the very beginning of the motion up to the point in question.

3. Other Fundamental Equations

3.1 Equation of Continuity

Introducing the notion of the "incoming" and "disturbed" density of the fluid, the equation of continuity in the $\{r, \theta, \varphi; R_m\}$ -coordinate system takes the form:

$$\begin{aligned} & (\varrho_i + \varrho_d)_{,t} + (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left\{ \{(\varrho_i + \varrho_d) \cdot (R R_m \cos \varphi) [C_{ri} + (\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,r} \right. \\ & - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr}]\}_{,r} + \{(\varrho_i + \varrho_d) \cdot R_m (\cos \varphi) (C_{ui} + R^{-1} \Phi_{d,\theta} \\ & + X_{du})\}_{,\theta} + \{(\varrho_i + \varrho_d) R (\cos \varphi) [C_{mi} - \sin \varphi (\cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} + (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} \\ & + X_{dm}]\}_{,\varphi} \} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

With the assumption that the equation of continuity is satisfied by itself for the incoming flow, equation (3.1.1) reduces to the form:

$$\begin{aligned} & \varrho_{d,t} + (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left\{ \{ \varrho_d \cdot R R_m \cos \varphi C_{ri} + (\varrho_i + \varrho_d) R R_m \cos \varphi [(\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,r} \right. \\ & - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr}]\}_{,r} + \{ \varrho_d R_m \cos \varphi C_{ui} + (\varrho_i + \varrho_d) R_m \cos \varphi (R^{-1} \Phi_{d,\theta} \\ & + X_{du})\}_{,\theta} + \{ \varrho_d R \cos \varphi C_{mi} + (\varrho_i + \varrho_d) R \cos \varphi [-\sin \varphi (\cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} \\ & + (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dm}]\}_{,\varphi} \} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Knowing the functions: ϱ_i , Φ_d , X_{dr} , X_{du} , X_{dm} , equation (3.1.2) enables one to find the function ϱ_d .

3.2. Equation of State

The same technique applied to the equation of state gives the formula:

$$p_d = \bar{R} [\varrho_d T_i + (\varrho_i + \varrho_d) T_d]. \quad (3.2.1)$$

3.3. Energy Equation

In steady state conditions when the heat is being added to the particle, the energy (generalized Bernoulli) equation, valid along a streamline, has the form:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} C_i^2 + \gamma (\gamma - 1)^{-1} \bar{R} T_i - \int_0^{s_i} T_i dS_i = \frac{1}{2} (\vec{C}_i + \vec{q}_d)^2 + \gamma (\gamma - 1)^{-1} \bar{R} (T_i + T_d) \\ & - Q_t - \int_{s_i}^s [(P_{rt} + P_{mt} \sin \varphi) dr + R P_{ut} d\theta + R_m (P_{rt} \sin \varphi + P_{mt}) d\varphi]; \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

where $Q_t = \int_{s_i}^s (T_i + T_d) d(S_i + S_d)$, and

$$C_i^2 = C_{ri}^2 + C_{ui}^2 + C_{mi}^2 + 2 C_{ri} C_{mi} \sin \varphi; \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} & (\vec{C}_i + \vec{q}_d)^2 = C_i^2 + q_d^2 + 2 C_{ri} (\Phi_{d,r} + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi) + 2 C_{ui} (R^{-1} \Phi_{d,\theta} + X_{du}) \\ & + 2 C_{mi} (R_m^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr} \sin \varphi + X_{dm}), \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} & q_d^2 = (\cos^2 \varphi)^{-1} (\Phi_{d,r})^2 + R^{-2} (\Phi_{d,\theta})^2 + (R_m \cos \varphi)^{-2} (\Phi_{d,\varphi})^2 + X_{dr}^2 + X_{du}^2 + X_{dm}^2 \\ & - 2 (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} \Phi_{d,\varphi} \sin \varphi + 2 \Phi_{d,r} X_{dr} + 2 R^{-1} \Phi_{d,\theta} X_{du} \\ & + 2 R_m^{-1} \Phi_{d,\varphi} X_{dm} + 2 X_{dr} X_{dm} \sin \varphi; \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$$Q_t = Q_i + Q_d; P_{rt} = P_{ri} + P_{rd}; P_{ut} = P_{ui} + P_{ud}; P_{mt} = P_{mi} + P_{md}. \quad (3.3.5)$$

3.4. Pressure-Density Relation

From equation (1.1.3) one obtains:

$$p_d p_0^{-1} = \{[(\varrho_i + \varrho_d) \varrho_0^{-1}]^\gamma \exp(S_d c_v^{-1}) - (\varrho_i \varrho_0^{-1})^\gamma\} \cdot \exp[(S_i - S_0) c_v^{-1}]. \quad (3.4.1)$$

3.5. Forces

The greatest difficulty in the procedure, outlined above, lies in finding the correct values of the forces exerted by the rotor blades upon the fluid. We shall outline below two possible approaches to this problem.

(i) It is hardly possible to assume that the Kutta-Joukowski theorem is valid inside the energetic system consisting of rotor and fluid. Neither the non-uniformity of the incoming stream of the velocity $\vec{C}_i$, nor the heat phenomena inside the rotor may justify the validity of that theorem. In spite of that, let us assume the validity of that theorem. Then according to this theorem the resultant force acting on a single blade is perpendicular to the incoming velocity vector. Using the vector notation, one has

$$\vec{P}_i \cdot \vec{C}_i = 0, \text{ or:} \\ P_{ri}(C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi) + P_{ui} C_{ui} + P_{mi}(C_{ri} \sin \varphi + C_{mi}) = 0. \quad (3.5.1)$$

But the actual force differs from the force $\vec{P}_i(P_{ri}, P_{ui}, P_{mi})$ and this difference may be expressed in terms of the disturbed force $\vec{P}_d(P_{rd}, P_{ud}, P_{md})$, whose value naturally would be different from zero. But it may be difficult, if possible, to find the value of $\vec{P}_d$.

(ii) The second possibility is to assume that the force vector, $\vec{P}_i$, contains a certain known angle α with the velocity vector $\vec{C}_i$. Using the vectorial notation, this gives the formula:

$$\vec{P}_i \cdot \vec{C}_i = |\vec{P}_i| \cdot |\vec{C}_i| \cdot \cos \alpha; \quad (3.5.2)$$

in the present coordinate system this takes the form:

$$P_{ri}(C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi) + P_{ui} C_{ui} + P_{mi}(C_{ri} \sin \varphi + C_{mi}) = |\vec{P}_i| \cdot |\vec{C}_i| \cos \alpha; \quad (3.5.3)$$

$$|\vec{P}_i| = (P_{ri}^2 + P_{ui}^2 + P_{mi}^2 + 2 P_{ri} P_{mi} \sin \varphi)^{\frac{1}{2}}; \quad (3.5.4)$$

$$|\vec{C}_i| = (C_{ri}^2 + C_{ui}^2 + C_{mi}^2 + 2 C_{ri} C_{mi} \sin \varphi)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5.5)$$

The disturbed force in this case is equal identically to zero, and this value should be inserted in all the equations derived above and below.

3.6. Additional Condition

Multiplying equation (1.1.4) (in steady state conditions) scalarly by $\vec{q}$ gives result:

$$\vec{q} \cdot (\nabla H - T \nabla S - \vec{P}) = 0, \quad (3.6.1)$$

or

$$\begin{aligned}
& C_{ri} (H_{d,r} - T S_{d,r} - P_{rd} - P_{md} \sin \varphi) + C_{mi} R_m^{-1} [H_{d,\varphi} - T S_{d,\varphi} - R_m (P_{md} + P_{rd} \sin \varphi)] \\
& + C_{ui} [R^{-1} (H_{d,0} - T S_{d,0}) - P_{ud}] \\
& + X_{dr} [H_{,r} - T S_{,r} - (P_{ri} + P_{rd}) - (P_{mi} + P_{md}) \sin \varphi] \\
& + X_{dm} R_m^{-1} [H_{,\varphi} - T S_{,\varphi} - R_m ((P_{mi} + P_{md}) + (P_{ri} + P_{rd}) \sin \varphi)] \\
& + \Phi_{d,r} \{(\cos^2 \varphi)^{-1} [(H_{,r} - T S_{,r}) - R_m^{-1} \sin \varphi (H_{,\varphi} - T S_{,\varphi})] - (P_{ri} + P_{rd})\} \\
& + \Phi_{d,\varphi} \{(R_m \cos^2 \varphi)^{-1} [-\sin \varphi (H_{,r} - T S_{,r}) + R_m^{-1} (H_{,\varphi} - T S_{,\varphi})] - R_m^{-1} (P_{mi} + P_{md})\} \\
& + (\Phi_{d,0} + R X_{du}) [R^{-2} (H_{,0} - T S_{,0}) - R^{-1} (P_{ui} + P_{ud})] = 0,
\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

with

$$H = H_i + H_d; \quad T = T_i + T_d. \tag{3.6.3}$$

3.7. System of Equations

Assume that the following values are given:

$$\vec{C}_i (C_{ri}, C_{ui}, C_{mi}); p_i; q_i; T_i; S_i; \alpha; \tag{3.7.1}$$

and one component of the force $\vec{P}_i$. Then the system of equations:

(2.2.1); (2.2.4) plus two analogous equations;

(3.1.2); (3.2.1), (3.3.1), (3.4.1), (3.5.3), (3.6.2) represents a system of ten equations in ten unknown functions referring to the disturbed motion:

$$\Phi_d; X_{dr}; X_{du}; X_{dm}; p_d; q_d; T_d; S_d; \tag{3.7.2}$$

and two components of the force $\vec{P}_i$ with $\vec{P}_d \equiv 0$.

3.8. Influence of Angular Velocity

In the steady state conditions the influence of the angular velocity of the rotor may be taken into account by substituting everywhere the magnitude

$$(C_{ui} - \bar{\omega} R) \text{ for } C_{ui}, \tag{3.8.1}$$

with $\bar{\omega}$ denoting the angular velocity of the rotor.

4. System of Equations Without

The Velocity Potential

4.1. Crocco Equation

Obviously, it is possible to treat each of the components of the disturbed velocity $\vec{q}_d = (C_{rd}, C_{ud}, C_{md})$ as a whole without decomposing it into the potential and rotational parts. Below, we shall derive the system of linearized equations referring to this case.

With $\vec{q}_i = \vec{C}_i + \vec{q}_d$, one has:

C_i : contravariant: $C_{ri}; R^{-1} C_{ui}; R_m^{-1} C_{mi}$;

covariant: $(C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi); R C_{ui}; R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi})$;

physical: $C_{ri}; C_{ui}; C_{mi}$;

q_d : contravariant: $C_{rd}; R^{-1} C_{ud}; R_m^{-1} C_{md}$;

covariant: $(C_{rd} + C_{md} \sin \varphi); R C_{ud}; R_m (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})$;

physical: $C_{rd}; C_{ud}; C_{md}$.

The disadvantage of the present approach is that one does not obtain explicitly the components of the disturbed vorticity vector, $\vec{\omega}_d$. The three scalar equations of the modified Crocco vector equation (1.4.5) have the form:

$$(\cos^2 \varphi)^{-1} (H_{d,r} - T S_{d,r} + A S_{,r}) - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} (H_{d,\varphi} - T S_{d,\varphi} + A S_{,\varphi}) + B [(\cos^2 \varphi)^{-1} S_{d,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} S_{d,\varphi}] = p^1 + \underline{p}^1 + P_{rd}; \quad (4.1.1)$$

$$R^{-2} [(H_{d,\theta} - T S_{d,\theta}) + A S_{,\theta} + B S_{d,\theta}] = p^2 + \underline{p}^2 + R^{-1} P_{ud}; \quad (4.1.2)$$

$$- \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} (H_{d,r} - T S_{d,r} + A S_{,r}) + (R_m \cos \varphi)^{-2} (H_{d,\varphi} - T S_{d,\varphi} + A S_{,\varphi}) - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} B S_{d,r} + (R_m \cos \varphi)^{-2} \cdot B S_{d,\varphi} = p^3 + \underline{p}^3 + R_m^{-1} P_{md};$$

$$H_d = \frac{1}{2} \vec{q}_d^2 + (\vec{q}_i \cdot \vec{q}_d) + c_p T_d; \quad (4.1.3)$$

$$A = c_p^{-1} \{ [C_{ri} (C_{rd} + C_{md} \sin \varphi) + C_{ui} C_{ud} + C_{mi} (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})] \} + \bar{A}; \quad (4.1.4a)$$

$$\bar{A} = c_p^{-1} \left\{ \int_{s_1}^s [(P_{rd} + P_{md} \sin \varphi) dr + R P_{ud} d\theta + R_m (P_{rd} \sin \varphi + P_{md}) d\varphi] + \int_{s_1}^s (T_d dS + T_i dS_d) \right\}; \quad (4.1.4b)$$

$$B = c_p^{-1} \left\{ \int_{s_1}^s [(P_{ri} + P_{mi} \sin \varphi) dr + R P_{ui} d\theta + R_m (P_{ri} \sin \varphi + P_{mi}) d\varphi] + \int_{s_1}^s T_i dS_i \right\}; \quad (4.1.4c)$$

$$S = S_i + S_d; \quad (4.1.5)$$

the expressions for p^i , $\underline{p}^i$ ($i = 1, 2, 3$) are given in the Appendix.

The scalar equation (1.4.3) [or (2.2.1)] takes the form:

$$\begin{aligned} & \gamma \bar{R} T_i (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ (R R_m \cos \varphi C_{rd})_{,r} + (R_m \cos \varphi C_{ud})_{,\theta} + (R (\cos \varphi) C_{md})_{,\varphi} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ C_{rd} (C_i^2)_{,r} + R^{-1} C_{ud} (C_i^2)_{,\theta} + R_m^{-1} C_{md} \cdot (C_i^2)_{,\varphi} \} + C_{ri} I_{,r} + R^{-1} C_{ui} I_{,\theta} \\ &+ R_m^{-1} C_{mi} I_{,\varphi} + (\gamma - 1) I (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ [R R_m \cos \varphi C_{ri}]_{,r} + (R_m C_{ui} \cos \varphi)_{,\theta} \\ &+ (R \cos \varphi C_{mi})_{,\varphi} \} - (\gamma - 1) (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ [R R_m \cos \varphi (C_{ri} + C_{rd})]_{,r} \\ &+ [R_m \cos \varphi (C_{ui} + C_{ud})]_{,\theta} + [R \cos \varphi (C_{mi} + C_{md})]_{,\varphi} \} \cdot \left\{ \int_{s_1}^s [(P_{rd} + P_{md} \sin \varphi) dr \right. \\ &+ R P_{ud} d\theta + R_m (P_{rd} \sin \varphi + P_{md}) d\varphi] + I_d \} \\ &- (\gamma - 1) (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ (R R_m (\cos \varphi) C_{rd})_{,r} + (R_m \cos \varphi C_{ud})_{,\theta} \\ &+ (R (\cos \varphi) C_{md})_{,\varphi} \} \{ I_i + \int_{s_1}^s [(P_{ri} + P_{mi} \sin \varphi) dr + R P_{ui} d\theta \\ &+ R_m (P_{ri} \sin \varphi + P_{mi}) d\varphi] \} - (C_{rd} + C_{md} \sin \varphi) P_{ri}^{(1)} - C_{ud} P_{ui}^{(1)} \\ &- (C_{rd} \sin \varphi + C_{md}) P_{mi}^{(1)} - [C_{ri} + C_{rd} + (C_{mi} + C_{md}) \sin \varphi] P_{rd}^{(1)} - (C_{ui} + C_{ud}) P_{ud}^{(1)} \\ &- [(C_{ri} + C_{rd}) \sin \varphi + C_{mi} + C_{md}] P_{md}^{(1)}; \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

where:

$$I = C_{ri} (C_{rd} + C_{md} \sin \varphi) + C_{ui} C_{ud} + C_{mi} (C_{rd} \sin \varphi + C_{md}). \quad (4.1.7)$$

In case one assumes that the velocity of sound in disturbed region is equal to the velocity of sound in the incoming flow, the terms containing the coefficient A in equations (4.1.1), (4.1.2), and (4.1.3), and the terms containing the coefficient $(\gamma - 1)$ in equation (4.1.6) should be omitted, except those in eq. (1.4.6) mentioned at the end of Section 2.2.

4.2. Remaining Equations

The equation of continuity has the form:

$$\begin{aligned} \varrho_{d,i} + (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ [\varrho_d R R_m (\cos \varphi) C_{ri} + (\varrho_i + \varrho_d) R R_m (\cos \varphi) C_{rd}]_{,r} \\ + [\varrho_d R_m (\cos \varphi) C_{ui} + (\varrho_i + \varrho_d) R_m (\cos \varphi) C_{ua}]_{,\theta} + [\varrho_d R (\cos \varphi) C_{mi} \\ + (\varrho_i + \varrho_d) R (\cos \varphi) C_{md}]_{,\varphi} \} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

The energy equation remains in the form of equation (3.3.1) with equation (3.3.2); equation (3.3.3) takes the form:

$$(\vec{C}_i + \vec{q}_d)^2 = C_i^2 + \vec{q}_d^2 + 2 [C_{ri} (C_{rd} + \vec{C}_{md} \sin \varphi) + C_{ui} C_{ud} + C_{mi} (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})]; \quad (4.2.2)$$

$$\vec{q}_d^2 = C_{rd}^2 + C_{ud}^2 + C_{md}^2 + 2 C_{rd} C_{md} \sin \varphi. \quad (4.2.3)$$

The equation of state, the pressure-density relation and the force-velocity relation remain in the forms of equations (3.2.1), (3.4.1), and (3.5.3), respectively. Equation (3.6.2) transforms into:

$$\begin{aligned} C_{ri} (H_{d,r} - T S_{d,r} - P_{rd} - P_{md} \sin \varphi) + C_{mi} R_m^{-1} [H_{d,\varphi} - T S_{d,\varphi} - R_m (P_{md} + P_{rd} \sin \varphi)] \\ + C_{ui} [R^{-1} (H_{d,\theta} - T S_{d,\theta}) - P_{ud}] + C_{rd} [H_{,r} - T S_{,r} - (P_{ri} + P_{rd}) - (P_{mi} + P_{md}) \sin \varphi] \\ + C_{md} R_m^{-1} [H_{,\varphi} - T S_{,\varphi} - R_m ((P_{mi} + P_{md}) + (P_{ri} + P_{rd}) \sin \varphi)] \\ + C_{ud} [R^{-1} (H_{,\theta} - T S_{,\theta}) - (P_{ui} + P_{ud})] = 0, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

with

$$H = H_i + H_d; \quad T = T_i + T_d; \quad S = S_i + S_d.$$

The system of equations (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.2.1) and (4.2.4) [notice that the first three equations may be treated independently of equation (4.2.1)] represent a system of linear first order partial differential equations in the velocity components, density, and H or S provided that all the other functions, appearing in those equations, are assumed to be known. We may treat this system as a particular case of the system of r equations in r unknown functions and $(n + 1)$ independent variables. Various kinds of the initial value problem for such a system are thoroughly discussed in Ref. [7] jointly with the corresponding existence theorems. The reader interested in this subject may refer to [7]. On the basis of [7] one may state that, with the usual initial data (entrance conditions) the system in question has a solution.

5. Particular Case

5.1. Cylindrical coordinates

For illustrative purposes let us assume a particular case of the system of equations in Chapter 4. in cylindrical coordinates. In [6] the author had shown that the passage from the $\{r, \theta, \varphi; R_m\}$ system to $\{r, \theta, z\}$ (cylindrical coordinates)-system may be achieved by using the expressions:

$$\varphi = 0; \quad R_m = 1; \quad R_m \cos \varphi d\varphi \rightarrow dz.$$

Moreover, let us consider only one layer inside the compressor, i. e., assume that

$$C_{ri} = C_{rd} = 0,$$

and that all the derivatives with respect to the radius “ r ” vanish. After all the transformations, the equations (4.1.2) and (4.1.3) reduce to the forms:

$$a_{11} C_{ud,z} + b_{12} C_{md,\theta} = h_1; \quad (5.1.1)$$

$$a_{21} C_{ud,z} + b_{22} C_{md,0} = h_2; \quad (5.1.2)$$

$$a_{11} = R C_{mi}; \quad a_{12} = b_{11} = 0; \quad b_{12} = -C_{mi}; \quad (5.1.3)$$

$$a_{21} = -R C_{ui}; \quad a_{22} = b_{21} = 0; \quad b_{22} = C_{ui}; \quad (5.1.4)$$

$$\begin{aligned} h_1 = & - \left\{ R^{-1} S, \quad c_p^{-1} C_{ui} C_{ud} - [(C_{mi,0} - R C_{ui,z}) - R^{-1} S, {}_0 c_p^{-1} C_{mi}] \cdot C_{md} - P_{ud} \right. \\ & + R^{-1} \left[(H_{d,0} - T_i S_{d,0}) + S, {}_0 c_p^{-1} \left\{ \int_{s_1}^s (R P_{ud} d\theta + P_{md} dz) + I_d \right\} \right. \\ & \left. \left. + S_{d,0} c_p^{-1} \left[\int_{s_1}^s (R P_{ui} d\theta + P_{mi} dz) + I_i \right] \right\} \right]; \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} h_2 = & - \left\{ (C_{mi,0} - R C_{ui,z} + c_p^{-1} S, {}_z C_{ui}) C_{ud} + c_p^{-1} S, {}_z C_{mi} C_{md} - P_{md} + H_{d,z} \right. \\ & - T_i S_{d,z} + S, {}_z c_p^{-1} \int_{s_1}^s (R P_{ud} d\theta + P_{md} dz) + S_{d,z} c_p^{-1} \int_{s_1}^s (R P_{ui} d\theta + P_{mi} dz) \\ & \left. + c_p^{-1} (S, {}_z I_d + S_{d,z} I_i) \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

After performing all the manipulations, equation (4.1.6) takes the form:

$$\begin{aligned} & R^{-1} [\gamma \bar{R} T_i - C_{ui}^2 + (\gamma - 1) (S'_1 + S'_2)] C_{ud,0} - R^{-1} C_{ui} C_{mi} C_{md,0} - C_{ui} C_{mi} C_{ud,z} \\ & + [\gamma \bar{R} T_i - C_{mi}^2 + (\gamma - 1) (S'_1 + S'_2)] C_{md,z} - (D - P_{ui}^{(1)} - P_{ud}^{(1)}) C_{ud} \\ & - (E - P_{mi}^{(1)} - P_{md}^{(1)}) C_{md} + (\gamma - 1) (R^{-1} C_{ui,0} + C_{mi,z}) S'_1 + C_{ui} P_{ud}^{(1)} + C_{mi} P_{md}^{(1)} = 0; \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

with

$$D = \frac{1}{2} R^{-1} [(C_i^2), {}_0 + \gamma (C_{ui}^2), {}_0] + C_{mi} C_{ui,z} + (\gamma - 1) C_{ui} C_{mi,z}; \quad (5.1.7a)$$

$$E = \frac{1}{2} [(C_i^2), {}_z + \gamma (C_{mi}^2), {}_z] + R^{-1} [C_{ui} C_{mi,0} + (\gamma - 1) C_{mi} C_{ui,0}]; \quad (5.1.7b)$$

$$S_1 = \int_{s_1}^s (R P_{ud} d\theta + P_{md} dz); \quad S_2 = \int_{s_1}^s (R P_{ui} d\theta + P_{mi} dz); \quad (5.1.7c)$$

$$S'_1 = S_1 + I_d; \quad S'_2 = S_2 + I_i. \quad (5.1.7d)$$

In case one assumes the velocity of sound in the disturbed region equal to the velocity of sound in the incoming flow, the terms containing the coefficient c_p^{-1} in equations (5.1.5) and (5.1.6) should be omitted; in equation (5.1.7) the terms containing the coefficient $(\gamma - 1)$ should be omitted except those mentioned at the end of Section 2.2, and the coefficients D and E should be substituted by the coefficients D' and E' :

$$D' = \frac{1}{2} R^{-1} [(C_i^2), {}_0 + (C_{ui}^2), {}_0] + C_{mi} C_{ui,z}; \quad (5.1.7a')$$

$$E' = \frac{1}{2} [(C_i^2), {}_z + (C_{mi}^2), {}_z] + R^{-1} C_{ui} C_{mi,0}. \quad (5.1.7b')$$

Assume a system of equations:

$$a_{11} u, {}_x + a_{12} v, {}_x + b_{11} u, {}_y + b_{12} v, {}_y = h_1; \quad (5.1.8)$$

$$a_{21} u, {}_x + a_{22} v, {}_x + b_{21} u, {}_y + b_{22} v, {}_y = h_2. \quad (5.1.9)$$

Let the values of the functions $u(x, y)$ and $v(x, y)$ and the partial derivatives $u_{,x}$ and $v_{,x}$ be given on a curve $y = k(x)$ in the (x, y) -plane. Then the following cases may be considered [8, p. 62]:

(i) The determinant

$$R = \begin{vmatrix} k'a_{11} - b_{11} & k'a_{12} - b_{12} \\ k'a_{21} - b_{21} & k'a_{22} - b_{22} \end{vmatrix}, \quad k' = dy/dx, \quad (5.1.10)$$

does not vanish; then the functions u, v and their derivatives are uniquely defined by the system (5.1.8) and (5.1.9) provided that they exist;

(ii) $R = 0$ and $V_1 = 0$, where:

$$V_1 = \begin{vmatrix} k'a_{11} - b_{11} & h_1 - a_{11}u_{,x} - a_{12}v_{,x} \\ k'a_{21} - b_{21} & h_2 - a_{21}u_{,x} - a_{22}v_{,x} \end{vmatrix}; \quad (5.1.11)$$

in this case there are infinitely many solutions $u_{,y}$ and $v_{,y}$;

(iii) $R = 0$ and $V_1 \neq 0$, then no solutions $u_{,y}$ and $v_{,y}$ exist. In the case of three or more equations with $R = 0$ the reader is referred to [Ref. 9]. Consider the system of equations (5.1.1) and (5.1.2). It is easily seen that $R = V_1 = 0$, which means that there are infinitely many solutions. Multiply equation (5.1.1) by C_{ui} , equation (5.1.2) by C_{mi} and add these equations, thus obtaining the relation $h_1 C_{ui} + h_2 C_{mi} = 0$ or:

$$G C_{ud} + K C_{md} + L = 0, \quad (5.1.12)$$

$$G = R^{-1} S_{,0} c_p^{-1} C_{ui}^2 + (C_{mi,0} - R C_{ui,z} + c_p^{-1} S_{,z} C_{ui}) C_{mi}; \quad (5.1.13)$$

$$K = S_{,z} c_p^{-1} C_{mi}^2 - (C_{mi,0} - R C_{ui,z} - c_p^{-1} R^{-1} S_{,0} C_{mi}) C_{ui}; \quad (5.1.13a)$$

$$L = -P_{ud} C_{ui} + R^{-1} [H_{d,0} - T_i S_{d,0} + c_p^{-1} (S_{,0} S'_1 + S_{d,0} S'_2)] C_{ui} - P_{md} C_{mi} \\ + [H_{d,z} - T_i S_{d,z} + c_p^{-1} (S_{,z} S'_1 + S_{d,z} S'_2)] C_{mi}; \quad (5.1.14)$$

$$S = S_i + S_d. \quad (5.1.15)$$

In case one assumes that the velocity of sound in the disturbed region is equal to the velocity of sound in the incoming stream, the terms containing the coefficient c_p^{-1} in equations (5.1.12), (5.1.13) and (5.1.14) should be omitted. Let us assume this alternative, let us calculate C_{ud} from equation (5.1.12) and substitute into equation (5.1.7) with equations (5.1.7a') and (5.1.7b'). The result can be presented in the form:

$$a C_{md,0} + b C_{md,z} = c, \quad (5.1.16)$$

with the coefficients:

$$a = R^{-1} [(\gamma \bar{R} T_i - C_{ui}^2) (C_{ui} C_{mi}^{-1}) - C_{ui} C_{mi}]; \quad (5.1.17)$$

$$b = (\gamma \bar{R} T_i - C_{mi}^2 - C_{ui}^2); \quad (5.1.18)$$

$$c = -[R^{-1} (\gamma \bar{R} T_i - C_{ui}^2) (C_{ui} C_{mi}^{-1})_{,0} - C_{ui} C_{mi} (C_{ui} C_{mi}^{-1})_{,z} \\ - (D' - P_{ui}^{(1)} - P_{ud}^{(1)}) C_{ui} C_{mi}^{-1} - (E' - P_{mi}^{(1)} - P_{md}^{(1)})] C_{md} - R^{-1} (\gamma \bar{R} T_i - C_{ui}^2) M_{,0} \\ + C_{ui} C_{mi} M_{,z} + (D' - P_{ui}^{(1)} - P_{ud}^{(1)}) M - C_{ui} P_{ud}^{(1)} - C_{mi} P_{md}^{(1)}]; \quad (5.1.19)$$

$$M = (C_{mi,0} - R C_{ui,z})^{-1} [P_{ud} C_{ui} + P_{md} C_{mi} - R^{-1} (H_{d,0} - T_i S_{d,0}) C_{ui} \\ - (H_{d,z} - T_i S_{d,z}) C_{mi}], \quad (5.1.20)$$

and D' and E' are given by equations (5.1.7a') and (5.1.7b'), respectively. Equation (5.1.16) may be solved by means of characteristics. Let us define C_{md} as a function of $\{\theta, z\}$ by means of an implicit equation of the form $u(\theta, z, C_{md}) = 0$. On differentiating, one has:

$$u_{,\theta} + u_{,C_{md}} C_{md,0} = 0; \quad u_{,z} + u_{,C_{md}} C_{md,z} = 0, \quad (5.1.21)$$

which inserted into equation (5.1.16) gives the result:

$$a u_{,\theta} + b u_{,z} + c u_{,C_{md}} = 0. \quad (5.1.22)$$

The auxiliary equations are:

$$a^{-1} d\theta = b^{-1} dz = c^{-1} dC_{md}. \quad (5.1.23)$$

Assume, for illustrative purposes, that $a = a(\theta)$, $b = b(\theta)$, only, then

$$z = \int b a^{-1} d\theta = A_1(\theta), \quad \theta = A_2(z). \quad (5.1.24)$$

With $c = c(\theta, C_{md})$, one may be able to find the integral

$$z = \int b(\theta) c^{-1}(\theta, C_{md}) dC_{md} = B_1(\theta, C_{md}) = B_1(A_2(z), C_{md}), \text{ or } C_{md} = B_2(z). \quad (5.1.25)$$

Then the general integral of equation (5.1.21) is:

$$u = \pi(\theta A_2^{-1}(z), C_{md} B_2^{-1}(z)), \quad (5.1.26)$$

where π is an arbitrary function of its arguments. When the boundary conditions are considered, one obtains a special subclass of functions.

5.2. Remaining Equations

Continuity equation its:

$$R^{-1} [\varrho_d C_{ui} + (\varrho_i + \varrho_d) C_{ud}]_{,\theta} + [\varrho_d C_{mi} + (\varrho_i + \varrho_d) C_{md}]_{,z} = 0; \quad (5.2.1)$$

equation of state and pressure-density relation remain in forms (3.2.1) and (3.4.1), respectively; the energy equation takes the form:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [C_{ud}^2 + C_{md}^2 + 2(C_{ui} C_{ud} + C_{mi} C_{md})] + \gamma(\gamma - 1)^{-1} \bar{R} T_d - Q_i \\ & - \int_{s_1}^s (R P_{ut} d\theta + P_{mt} dz) = 0; \quad P_{ut} = P_{ui} + P_{ud}, \text{ etc.}; \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

the force-velocity relation takes the form:

$$P_{ui} C_{ui} + P_{mi} C_{mi} = (P_{ui}^2 + P_{mi}^2)^{1/2} (C_{ui}^2 + C_{mi}^2)^{1/2} \cos \alpha. \quad (5.2.3)$$

The condition (3.6.1) or equation (4.2.4) takes the form:

$$\begin{aligned} & C_{mi} (H_{d,z} - T S_{d,z} - P_{md}) + C_{ui} [R^{-1} (H_{d,\theta} - T S_{d,\theta}) - P_{ud}] \\ & + C_{md} [H_{,z} - T S_{,z} - (P_{mi} + P_{md})] + C_{ud} [R^{-1} (H_{,\theta} - T S_{,\theta}) - (P_{ui} + P_{ud})] = 0. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Appendix

Symbols and Notations

$$\vec{V} = \vec{i} d/dx + \vec{j} d/dy + \vec{k} d/dz;$$

∇F = gradient of F , F = scalar;

$$\vec{V} \cdot \vec{F} = F_{1,x} + F_{2,y} + F_{3,z} = \text{diver. of } \vec{F} = \text{div grad } \Phi = \vec{V} \cdot \text{grad } \Phi = \nabla^2 \Phi, \vec{F} = \text{grad } \Phi;$$

$$(\vec{V} \cdot \vec{V}) F = \nabla^2 F = \text{Laplacian};$$

$$(\vec{s} \cdot \vec{V}) u = \vec{s} \cdot \nabla u = s_1 u_{,x} + s_2 u_{,y} + s_3 u_{,z};$$

$$\nabla \times \vec{v} = \text{curl } \vec{v} = i (\vec{v}_{3,y} - \vec{v}_{2,z}) + j (\vec{v}_{1,z} - \vec{v}_{3,x}) + k (\vec{v}_{2,x} - \vec{v}_{1,y});$$

$$\left(\vec{s} \cdot \nabla \right) \vec{v} = s_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + s_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + s_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z};$$

$$\nabla^2 \vec{v} = i \nabla^2 v_1 + j \nabla^2 v_2 + k \nabla^2 v_3;$$

$$\nabla \nabla \cdot \vec{u} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_{1,x} + u_{2,y} + u_{3,z});$$

$$\nabla \vec{F} = i i F_{x,x} + j i F_{x,y} + k i F_{x,z} + i j F_{y,x} + j j F_{y,y} + k j F_{y,z} + i k F_{z,x} + j k F_{z,y} + k k F_{z,z};$$

$$\Phi = \vec{A}_1 \vec{B}_1 + \vec{A}_2 \vec{B}_2 + \dots \vec{A}_n \vec{B}_n, \text{ dyadic};$$

$$\Phi \cdot \vec{v} = \vec{A}_1 \vec{B}_1 \cdot \vec{v} + \dots + \vec{A}_n \vec{B}_n \cdot \vec{v};$$

$$\vec{v} \cdot \Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}_1 \vec{B}_1 + \dots + \vec{v} \cdot \vec{A}_n \vec{B}_n;$$

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = i (u u_{,x} + v u_{,y} + w v_{,z}) + j (u v_{,x} + v v_{,y} + w v_{,z}) + \dots;$$

$$\text{contravariant components of a vector } \vec{A} : A^1, A^2, A^3;$$

$$\text{covariant components of a vector } \vec{A} : A_1, A_2, A_3;$$

$$\vec{A} = a^i A_i = a_i A^i;$$

$$\text{gradient: } \nabla = \vec{a}^\lambda \partial / \partial x^\lambda = \vec{a}_i \partial / \partial x_i;$$

$$\partial / \partial x^\lambda = g_{i\lambda} \partial / \partial x_i; \quad \partial / \partial x_i = g^{\lambda i} \partial / \partial x^\lambda;$$

$$\text{curl } \vec{A} = g^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right) \vec{a}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right) \vec{a}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) \vec{a}_3 \right];$$

$$\text{div } \vec{A} = g^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (g^{1/2} A^\lambda);$$

$$\vec{p} = \vec{r} \times \vec{s} = [p^1, p^2, p^3];$$

$$p^1 = g^{1/2} [g^{11} (r^2 s^3 - r^3 s^2) + g^{12} (r^3 s^1 - r^1 s^3) + g^{13} (r^1 s^2 - r^2 s^1)];$$

$$p^2 = g^{1/2} [g^{21} (r^2 s^3 - r^3 s^2) + g^{22} (r^3 s^1 - r^1 s^3) + g^{23} (r^1 s^2 - r^2 s^1)];$$

$$p^3 = g^{1/2} [g^{31} (r^2 s^3 - r^3 s^2) + g^{32} (r^3 s^1 - r^1 s^3) + g^{33} (r^1 s^2 - r^2 s^1)];$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij} A^i B^j = A_j B^j;$$

$$x^i = \{r, \theta, \varphi; R_m\} - \text{system of coordinates with } R_m \text{ being a parameter:}$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + R^2 (d\theta)^2 + R_m^2 (d\varphi)^2 + 2 R_m \sin \varphi dr d\varphi;$$

$$[g_{ij}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & R_m \sin \varphi \\ 0 & R^2 & 0 \\ R_m \sin \varphi & 0 & R_m^2 \end{vmatrix};$$

$$g = R^2 R_m^2 \cos^2 \varphi;$$

$$[g^{ij}] = \begin{vmatrix} (\cos^2 \varphi)^{-1} & 0 & -R_m^{-1} (\cos^2 \varphi)^{-1} \sin \varphi \\ 0 & R^{-2} & 0 \\ -R_m^{-1} (\cos^2 \varphi)^{-1} \sin \varphi & 0 & R_m^{-2} (\cos \varphi)^{-2} \end{vmatrix};$$

absolute velocity vector in $(r, \theta, \varphi; R_m)$ system: $\vec{C}$;

its physical components: C_r, C_u, C_m ;

its contravariant components: $C_r, R^{-1} C_u, R_m^{-1} C_m$;

its covariant components: $C_r + C_m \sin \varphi,$

$$R C_u,$$

$$R_m (C_r \sin \varphi + C_m);$$

components of the base vectors $\vec{a}_i$, referred to $\{r, \theta, \varphi\}$ coordinate system:

$$\vec{a}_1: (1, 0, 0); \vec{a}_2: (0, R, 0); \vec{a}_3: (0, 0, R_m);$$

contravariant components of gradient referred to $\vec{a}_i$ -system:

$$\vec{a}_1: A^1 = (\cos^2 \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$\vec{a}_2: A^2 = R^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$\vec{a}_3: A^3 = -\sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} + (R_m^2 \cos^2 \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

covariant components of gradient:

$$\vec{a}^1: \partial/\partial r; \vec{a}^2: \partial/\partial \theta; \vec{a}^3: \partial/\partial \varphi;$$

physical components of gradient are:

$$A^1 g_{11}^{1/2} = A^1; A^2 g_{22}^{1/2} = R^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta}; A^3 g_{33}^{1/2} = R_m A^3;$$

vector: $\vec{X}_d$:

physical components: $X_{dr}; X_{du}; X_{dm};$

contravariant components: $X_{dr}; R^{-1} X_{du}; R_m^{-1} X_{dm};$

covariant components: $X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi;$

$$R X_{du};$$

$$R_m (X_{dr} \sin \varphi + X_{dm});$$

contravariant components of the curl $\vec{C}$:

$$\vec{a}_1: (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R C_u) \right\};$$

$$\vec{a}_2: (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (C_r + C_m \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] \right\};$$

$$\vec{a}_3: (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial r} (R C_u) - \frac{\partial}{\partial \theta} (C_r + C_m \sin \varphi) \right];$$

$$\text{div } \vec{C} = (R R_m \cos \varphi)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (R R_m C_r \cos \varphi) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (R R_m R^{-1} C_u \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R C_m \cos \varphi) \right\};$$

$$\vec{p} = \vec{C} \times \vec{\omega};$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_1: p^1 &= (\cos^2 \varphi)^{-1} \left\{ R^{-1} C_u \left[\frac{\partial}{\partial r} (R C_u) - \frac{\partial}{\partial \theta} (C_r + C_m \sin \varphi) \right] \right. \\ &+ R_m^{-1} C_m \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (C_r + C_m \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] \right] \Big\} \\ &- \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \left\{ C_r \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (C_r + C_m \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] \right] \right. \\ &- R^{-1} C_u \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R C_u) \right] \Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_2: p^2 &= R^{-2} \left\{ R_m^{-1} C_m \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R C_u) \right] \right. \\ &- C_r \left[\frac{\partial}{\partial r} (R C_u) - \frac{\partial}{\partial \theta} (C_r + C_m \sin \varphi) \right] \Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_3: p^3 &= -\sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \left\{ R^{-1} C_u \left[\frac{\partial}{\partial r} (R C_u) - \frac{\partial}{\partial \theta} (C_r + C_m \sin \varphi) \right] \right. \\ &- R_m^{-1} C_m \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (C_r + C_m \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] \right] \Big\} \\ &+ (R_m^2 \cos^2 \varphi)^{-1} \left\{ C_r \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (C_r + C_m \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] \right] \right. \\ &- R^{-1} C_u \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [R_m (C_r \sin \varphi + C_m)] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R C_u) \right] \Big\}; \end{aligned}$$

$$\vec{q}_i \equiv \vec{C}_i = (C_{ri}; R^{-1} C_{ui}; R_m^{-1} C_{mi});$$

$$\vec{q}_d \equiv \vec{C}_d = (C_{rd}; R^{-1} C_{ud}; R_m^{-1} C_{md});$$

$$\text{Laplacian} = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{1/2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right);$$

Terms in equations (1.2.4) and (1.2.5):

$$\nabla \cdot \vec{q}_i = \nabla^2 \Phi_i + \text{div } \vec{X}_i;$$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{q}_i^2 \right) = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi_i)^2 + \nabla (\nabla \Phi_i \cdot \vec{X}_i) + \frac{1}{2} \nabla (\vec{X}_i)^2;$$

$$\begin{aligned} \vec{q}_i \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{q}_i^2 \right) &= (\nabla \Phi_i + \vec{X}_i) \cdot \left[\frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi_i)^2 \right] + (\nabla \Phi_i + \vec{X}_i) \cdot \nabla (\nabla \Phi_i \cdot \vec{X}_i) \\ &+ (\nabla \Phi_i + \vec{X}_i) \cdot \left[\frac{1}{2} \nabla (\vec{X}_i)^2 \right]; \end{aligned}$$

$$\vec{q}_i^2 - C^2 = (\nabla \Phi_i)^2 + 2 \nabla \Phi_i \cdot \vec{X}_i + (\vec{X}_i)^2 - C^2;$$

$$\begin{aligned} (\vec{q}_i^2 - C^2) \nabla \cdot \vec{q}_i &= [(\nabla \Phi_i)^2 - C^2] (\nabla^2 \Phi_i + \text{div } \vec{X}_i) \\ &+ [2 \nabla \Phi_i \cdot \vec{X}_i + (\vec{X}_i)^2] (\nabla^2 \Phi_i + \text{div } \vec{X}_i); \end{aligned}$$

$$\nabla H = \nabla H_i + \nabla H_d; \quad \nabla S = \nabla S_i + \nabla S_d;$$

$$\vec{q}_i \times \vec{\omega}_i = \vec{q}_i \times \vec{\omega}_i + \vec{q}_i \times \vec{\omega}_d + \vec{q}_d \times \vec{\omega}_i + \vec{q}_d \times \vec{\omega}_d.$$

Fundamental expressions in equations (1.4.3) and (1.4.5):

$$\vec{q}_d: \text{covariant: } \Phi_{d,r} + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi; \quad \Phi_{d,\theta} + R X_{du}; \quad \Phi_{d,\varphi} + R_m (X_{dr} \sin \varphi + X_{dm});$$

$$\begin{aligned} \text{contravariant: } (\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,r} - (\sin \varphi) R_m^{-1} (\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr}; \quad R^{-2} \Phi_{d,\theta} + R^{-1} X_{du}; \\ - \sin \varphi R_m^{-1} (\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,r} + (R_m \cos \varphi)^2 \Phi_{d,\varphi} + R_m^{-1} X_{dm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{q}_d = (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ & [R R_m (\cos \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} - R \sin \varphi (\cos \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} \\ & + R R_m (\cos \varphi) X_{dr}]_r + [R_m R^{-1} (\cos \varphi) \Phi_{d,\theta} + R_m (\cos \varphi) X_{du}]_\theta \\ & + [-R \sin \varphi (\cos \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} + R (R_m \cos \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + R (\cos \varphi) X_{dm}]_\varphi \}; \end{aligned}$$

$$\nabla(\vec{q}_i^2): \text{ contravariant:}$$

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \varphi)^{-1} (C_i^2)_{,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} (C_i^2)_{,\varphi}; \\ & R^{-2} (C_i^2)_{,\theta}; \\ & - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} (C_i^2)_{,r} + (R_m \cos \varphi)^{-2} (C_i^2)_{,\varphi}; \end{aligned}$$

$$\text{covariant: } (C_i^2)_{,r}; \quad (C_i^2)_{,\theta}; \quad (C_i^2)_{,\varphi};$$

$$C_i^2 = C_{ri}^2 + C_{ui}^2 + C_{mi}^2 + 2 \sin \varphi C_{ri} C_{mi};$$

$$(C_i^2)_{,r} = 2 [C_{ri} C_{ri,r} + C_{ui} C_{ui,r} + C_{mi} C_{mi,r} + \sin \varphi (C_{ri,r} C_{mi} + C_{ri} C_{mi,r})];$$

$$\begin{aligned} \vec{q}_d \cdot \nabla(\vec{q}_i^2) = & [(\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr}] (C_i^2)_{,r} \\ & + (R^{-2} \Phi_{d,\theta} + R^{-1} X_{du}) (C_i^2)_{,\theta} + [-\sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} \\ & + (R_m \cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,\varphi} + R_m^{-1} X_{dm}] (C_i^2)_{,\varphi}; \end{aligned}$$

$$\nabla(\vec{q}_i \cdot \vec{q}_d): \text{ covariant: } \vec{a}^1: I_{,r}; \quad \vec{a}^2: I_{,\theta}; \quad \vec{a}^3: I_{,\varphi};$$

$$\begin{aligned} I = \vec{q}_i \cdot \vec{q}_d = & C_{ri} (\Phi_{d,r} + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi) + R^{-1} C_{ui} (\Phi_{d,\theta} + R X_{du}) \\ & + R_m^{-1} C_{mi} [\Phi_{d,\varphi} + R_m ((\sin \varphi) X_{dr} + X_{dm})]; \end{aligned}$$

$$\vec{q}_i \cdot \nabla(\vec{q}_i \cdot \vec{q}_d) = C_{ri} I_{,r} + R^{-1} C_{ui} I_{,\theta} + R_m^{-1} C_{mi} I_{,\varphi};$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{q}_i = & (R R_m \cos \varphi)^{-1} [(R R_m (\cos \varphi) C_{ri})_{,r} \\ & + (R_m C_{ui} \cos \varphi)_{,\theta} + (R \cos \varphi C_{mi})_{,\varphi}]; \end{aligned}$$

$$(\vec{q}_i + \vec{q}_d): \text{ contravariant:}$$

$$\vec{a}_1: C_{ri} + (\cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,\varphi} + X_{dr};$$

$$\vec{a}_2: R^{-1} C_{ui} + R^{-2} \Phi_{d,\theta} + R^{-1} X_{du};$$

$$\vec{a}_3: R_m^{-1} C_{mi} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \Phi_{d,r} + (R_m \cos \varphi)^{-2} \Phi_{d,\varphi} + R_m^{-1} X_{dm};$$

$$\text{covariant:}$$

$$\vec{a}^1: C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi + \Phi_{d,r} + X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi;$$

$$\vec{a}^2: R C_{ui} + \Phi_{d,\theta} + R X_{du};$$

$$\vec{a}^3: R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi}) + \Phi_{d,\varphi} + R_m (X_{dr} \sin \varphi + X_{dm});$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{q}_i + \vec{q}_d) = & (R R_m \cos \varphi)^{-1} \{ [R R_m \cos \varphi (C_{ri} + X_{dr}) \\ & + R (\cos \varphi)^{-1} (R_m \Phi_{d,r} - (\sin \varphi) \Phi_{d,\varphi})]_r + [R_m (\cos \varphi) (C_{ui} \\ & + R^{-1} \Phi_{d,\theta} + X_{du})]_\theta + [R (\cos \varphi) (C_{mi} + X_{dm}) \\ & - R (\cos \varphi)^{-1} ((\sin \varphi) \Phi_{d,r} - R_m^{-1} \Phi_{d,\varphi})]_\varphi \}; \end{aligned}$$

$$\vec{dr} = \vec{a}_i dx^i; \quad dx^i = \{dr, d\theta, d\varphi\};$$

$$\vec{P}_d: \text{ physical components: } P_{rd}; \quad P_{ud}; \quad P_{md};$$

contravariant: $P_i: P_{rd}; R^{-1} P_{ud}; R_m^{-1} P_{md};$

covariant $P_i: P_{rd} + P_{md} \sin \varphi; R P_{ud};$

$$R_m (P_{rd} \sin \varphi + P_{md});$$

$$\vec{P}_d \cdot d\vec{\sigma} = (P_{rd} + P_{md} \sin \varphi) dr + R P_{ud} d\theta + R_m (P_{rd} \sin \varphi + P_{md}) d\varphi;$$

$\nabla H_d, \nabla S$: contravariant:

$$(\cos^2 \varphi)^{-1} H_{d,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} H_{d,\varphi}; R^{-2} H_{d,r};$$

$$(-\sin \varphi) (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} H_{d,r} + (R_m \cos \varphi)^{-2} H_{d,\varphi};$$

$\vec{\omega}_i$: contravariant: the same as the contravariant components of the curl $\vec{C}$

with $C_r = C_{ri}, C_u = C_{ui}, C_m = C_{mi};$

$\vec{\omega}_d$: contravariant: the same as above with $C_r = X_{dr}; C_u = X_{du}; C_m = X_{dm};$

$\vec{q}_i \times \vec{\omega}_d$: contravariant:

$$\begin{aligned} p^1 = & R R_m \cos \varphi \left[(\cos^2 \varphi)^{-1} \left\{ R^{-1} C_{ui} \left[(R X_{du})_{,r} - (X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi)_{,\theta} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - R_m^{-1} C_{mi} \left[(X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m ((\sin \varphi) X_{dr} + X_{dm})]_{,r} \right] \right\} \right. \\ & \left. - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \left\{ C_{ri} \left[(X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m ((\sin \varphi) X_{dr} + X_{dm})]_{,r} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - R^{-1} C_{ui} \left[[R_m ((\sin \varphi) X_{dr} + X_{dm})]_{,\theta} - (R X_{du})_{,\varphi} \right] \right\} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2 = & R R_m \cos \varphi R^{-2} \left\{ R_m^{-1} C_{mi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [R_m ((\sin \varphi) X_{dr} + X_{dm})] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R X_{du}) \right] \right. \\ & \left. - C_{ri} \left[\frac{\partial}{\partial r} (R X_{du}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (X_{dr} + (\sin \varphi) X_{dm}) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^3 = & R R_m \cos \varphi \left[-\frac{\sin \varphi}{(R_m \cos^2 \varphi)} \left\{ R^{-1} C_{ui} \left[\frac{\partial}{\partial r} (R X_{du}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (X_{dr} + X_{dm} \sin \varphi) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - R_m^{-1} C_{mi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (X_{dr} + (\sin \varphi) X_{dm}) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m ((\sin \varphi) X_{dr} + X_{dm})] \right] \right\} \right. \\ & \left. + (R_m \cos \varphi)^{-2} \left\{ C_{ri} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (X_{dr} + (\sin \varphi) X_{dm}) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m ((\sin \varphi) X_{dr} + X_{dm})] \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - R^{-1} C_{ui} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [R_m ((\sin \varphi) X_{dr} + X_{dm})] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R X_{du}) \right] \right\} \right]; \end{aligned}$$

$\vec{q}_d \times \vec{\omega}_i$: contravariant:

$$\begin{aligned} p^1 = & R R_m \cos \varphi \left[(\cos^2 \varphi)^{-1} \left\{ \left[R^{-2} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \theta} + R^{-1} X_{du} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} (R C_{ui}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \left[-\frac{\sin \varphi}{(R_m \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial r} + \frac{1}{(R_m^2 \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \varphi} + R_m^{-1} X_{dm} \right] \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (C_{ri} + (\sin \varphi) C_{mi}) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m ((\sin \varphi) C_{ri} + C_{mi})] \right] \right\} \right. \\ & \left. - \frac{\sin \varphi}{(R_m \cos^2 \varphi)} \left\{ \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \Phi_d}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{(R_m \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \varphi} + X_{dr} \right) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (C_{ri} + (\sin \varphi) C_{mi}) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m ((\sin \varphi) C_{ri} + C_{mi})] \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \left[R^{-2} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \theta} + R^{-1} X_{du} \right] \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [R_m ((\sin \varphi) C_{ri} + C_{mi})] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R C_{ui}) \right] \right\} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2 = & R R_m (\cos \varphi) R^{-2} \left\{ \left[-\frac{\sin \varphi}{(R_m \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial r} + \frac{1}{(R_m^2 \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \varphi} + R_m^{-1} X_{dm} \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [R_m ((\sin \varphi) C_{ri} + C_{mi})] - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R C_{ui}) \right] - \left[\frac{1}{(\cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{(R_m \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \varphi} + X_{dr} \right] \cdot \\
& \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (R C_{ui}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi) \right] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^3 = & R R_m \cos \varphi \left[\frac{(-\sin \varphi)}{R_m \cos^2 \varphi} \left\{ \left[R^{-2} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \theta} + R^{-1} X_{du} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (R C_{ui}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi) \right] \right. \right. \\
& - \left[-\frac{\sin \varphi}{(R_m \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial r} + \frac{1}{(R_m^2 \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \varphi} + R_m^{-1} X_{dm} \right] \cdot \\
& \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (C_{ri} + (\sin \varphi) C_{mi}) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m ((\sin \varphi) C_{ri} + C_{mi})] \right] \Big\} \\
& + (R_m^2 \cos^2 \varphi)^{-1} \left\{ \left[\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \Phi_d}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{(R_m \cos^2 \varphi)} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \varphi} + X_{dr} \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (C_{ri} + (\sin \varphi) C_{mi}) - \frac{\partial}{\partial r} [R_m ((\sin \varphi) C_{ri} + C_{mi})] \right] \\
& - \left[R^{-2} \frac{\partial \Phi_d}{\partial \theta} + R^{-1} X_{du} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [R_m ((\sin \varphi) C_{ri} + C_{mi}) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (R C_{ui})] \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

p^i in eqs. (4.1.1) – (4.1.3):

$$\begin{aligned}
p^1 = & R R_m \cos \varphi \left[\frac{1}{(\cos^2 \varphi)} \{ R^{-1} C_{ui} [(R C_{ud})_{,r} - (C_{rd} + C_{md} \sin \varphi)_{,\theta}] \right. \\
& - R_m^{-1} C_{mi} [(C_{rd} + C_{md} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})]_{,r}] \\
& - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \{ C_{ri} [(C_{rd} + C_{md} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})]_{,r}] \\
& - R^{-1} C_{ui} [[R_m (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})]_{,\theta} - (R C_{ud})_{,\varphi}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2 = & R^{-1} R_m \cos \varphi \{ R_m^{-1} C_{mi} [[R_m (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})]_{,\theta} - (R C_{ud})_{,\varphi}] \\
& - C_{ri} [(R C_{ud})_{,r} - (C_{rd} + C_{md} \sin \varphi)_{,\theta}] \};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^3 = & R R_m \cos \varphi \left[-\sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \{ R^{-1} C_{ui} [(R C_{ud})_{,r} - (C_{rd} + C_{md} \sin \varphi)_{,\theta}] \right. \\
& - R_m^{-1} C_{mi} [(C_{rd} + C_{md} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})]_{,r}] \\
& + (R_m \cos \varphi)^{-2} \{ C_{ri} [(C_{rd} + C_{md} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})]_{,r}] \\
& - R^{-1} C_{ui} [[R_m (C_{rd} \sin \varphi + C_{md})]_{,\theta} - (R C_{ud})_{,\varphi}] \Big\};
\end{aligned}$$

p^i in eqs. (4.1.1) – (4.1.3):

$$\begin{aligned}
p^1 = & R R_m \cos \varphi \left[(\cos^2 \varphi)^{-1} \{ R^{-1} C_{ud} [(R C_{ui})_{,r} - (C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi)_{,\theta}] \right. \\
& - R_m^{-1} C_{md} [(C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi})]_{,r}] \\
& - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \{ C_{rd} [(C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi})]_{,r}] \\
& - R^{-1} C_{ud} [[R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi})]_{,\theta} - (R C_{ui})_{,\varphi}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2 = & R R_m \cos \varphi \left[R^{-2} \{ R_m^{-1} C_{md} [[R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi})]_{,\theta} - (R C_{ui})_{,\varphi}] \right. \\
& - C_{rd} [(R C_{ui})_{,r} - (C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi)_{,\theta}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^3 = & R R_m \cos \varphi \left[-\sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} \{ R^{-1} C_{ud} [(R C_{ui})_{,r} - (C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi)_{,\theta}] \right. \\
& - R_m^{-1} C_{md} [(C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi})]_{,r}] \} \\
& + (R_m^2 \cos^2 \varphi)^{-1} \{ C_{rd} [(C_{ri} + C_{mi} \sin \varphi)_{,\varphi} - [R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi})]_{,r}] \\
& \left. - R^{-1} C_{ud} [[R_m (C_{ri} \sin \varphi + C_{mi})]_{,\theta} - (R C_{ui})_{,\varphi}] \} \right].
\end{aligned}$$

The terms in eqs. (2.2.1), (2.2.4), (4.1.6), (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7a to d), (5.1.14):

$$I_d = \int_{s_1}^s (T_i dS_d + T_d dS);$$

$$I_i = \int_{s_1}^s T_i dS_i.$$

Terms in equations (2.2.1) and (4.1.6):

$$\begin{aligned}
P_{ri}^{(1)} &= \{ P_{ri} - (\gamma - 1) [(\cos^2 \varphi)^{-1} Q_{i,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} Q_{i,\varphi}] \}; \\
P_{ui}^{(1)} &= \{ P_{ui} - (\gamma - 1) (R^{-1} Q_{i,\theta}) \}; \\
P_{mi}^{(1)} &= \{ P_{mi} - (\gamma - 1) [-\sin \varphi (\cos^2 \varphi)^{-1} Q_{i,r} + (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} Q_{i,\varphi}] \}; \\
P_{rd}^{(1)} &= \{ P_{rd} - (\gamma - 1) [(\cos^2 \varphi)^{-1} Q_{d,r} - \sin \varphi (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} Q_{d,\varphi}] \}; \\
P_{ud}^{(1)} &= \{ P_{ud} - (\gamma - 1) (R^{-1} Q_{d,\theta}) \}; \\
P_{md}^{(1)} &= \{ P_{md} - (\gamma - 1) [-\sin \varphi (\cos^2 \varphi)^{-1} Q_{d,r} + (R_m \cos^2 \varphi)^{-1} Q_{d,\varphi}] \}.
\end{aligned}$$

Terms in equations (5.1.7) and (5.1.19):

$$\begin{aligned}
P_{ui}^{(1)} &= [P_{ui} - (\gamma - 1) R^{-1} Q_{i,\theta}]; \\
P_{mi}^{(1)} &= [P_{mi} - (\gamma - 1) Q_{i,z}]; \\
P_{ud}^{(1)} &= [P_{ud} - (\gamma - 1) R^{-1} Q_{d,\theta}]; \\
P_{md}^{(1)} &= [P_{md} - (\gamma - 1) Q_{d,z}].
\end{aligned}$$

Bibliography

- ¹ G. N. Ward: Linearized Theory of Steady High-Speed Flow. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge, at the University Press, 1955.
- ² A. P. Wills: Vector Analysis with an Introduction to Tensor Analysis. Prentice-Hall, Inc., New York, 1947.
- ³ N. Coburn: Vector and Tensor Analysis. The Macmillan Co., New York, 1955.
- ⁴ I. S. Sokolnikoff: Tensor Analysis. New York, John Wiley & Sons, 1951.
- ⁵ M. Z. v. Krzywoblocki: On the Generalized Equations of Motion of an Inviscid Compressible Fluid in Axial Compressors. General Electric Co., Tech. Infor. Series, R56AGT484, Evendale, Ohio, Aug. 1956.
- ⁶ M. Z. v. Krzywoblocki: On the Mathematical Representation of the Flow of an Inviscid Compressible Fluid in Axial Compressors. (To be published.)
- ⁷ D. L. Bernstein: Existence Theorems in Partial Differential Equations. Annals of Mathematics Studies, No. 23, Princeton University Press, 1950.
- ⁸ R. Sauer: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin, 1952.
- ⁹ F. Rellich: Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Mathemat. Annalen, Vol. 109, 1934, 714–745.

(Eingegangen am 20. Januar 1959.)

Buchbesprechungen

Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Von *R. Zurmühl*. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 125 Textabb., XII, 524 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 28.50.

Das Buch von Zurmühl hat sich seit seinem ersten Erscheinen im Jahre 1953 einen besonderen Platz in der deutschsprachigen Lehrbuchliteratur auf dem Gebiete der numerischen Mathematik geschaffen. Es ist nicht nur der Gegenstand, der auf größtes Interesse stieß, auch die Art der Behandlung kommt den Bedürfnissen des Vertreters der Anwendungen entgegen, ohne die an ein mathematisches Lehrbuch zu stellende Strenge vermissen zu lassen. So ist es nicht verwunderlich, daß bereits nach wenigen Jahren eine Neuauflage nötig wurde, die der Verfasser benützte, um eine Reihe von Ergänzungen anzubringen und auch die inzwischen erschienene Literatur zu berücksichtigen.

In dem vorliegenden Werk werden — unter besonderer Berücksichtigung der numerischen Methoden — alle diejenigen Hilfsmittel bereitgestellt, die der Ingenieur oder Physiker, aber auch sonst jeder, der Mathematik konkret anzuwenden hat, kennen muß, um eine gestellte mathematische Aufgabe vollständig, das heißt bis zur Gewinnung zahlenmäßiger Resultate, lösen zu können. Der erste Teil des Buches ist algebraischen Fragestellungen gewidmet: zunächst werden die Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen — wobei auch die Frage der Stabilität behandelt wird — entwickelt, es folgen die Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, die im engen Zusammenhang mit der Matrizenrechnung behandelt werden. Hier findet auch die Behandlung algebraischer Eigenwertprobleme ihren Platz. Es folgt ein Abschnitt über Interpolation und numerische Integration und Differentiation. Im nächsten Abschnitt werden Probleme der Ausgleichsrechnung und der Statistik (besonders Prüfverfahren der Statistik) behandelt. Das nächste Kapitel ist der Frage der Darstellung von Funktionen (Harmonische Analyse, Ausgleichsrechnung, Reihenentwicklung) gewidmet. Die beiden letzten Kapitel beschäftigen sich mit der numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, wobei sowohl Anfangswertaufgaben als auch Rand- und Eigenwertaufgaben behandelt werden. Auf die Behandlung partieller Differentialgleichungen wurde bewußt verzichtet, weil eine ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes den Rahmen des Werkes gesprengt hätte.

Wie schon erwähnt, bringt die zweite Auflage gegenüber der ersten Auflage einige Ergänzungen insbesondere in den Kapiteln über lineare Gleichungen, Matrizen-Eigenwertaufgaben und Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungen. Das Kapitel über Statistik wurde gänzlich neu gefaßt und dadurch wesentlich bereichert.

Es ist dem Verfasser gelungen, ohne den Leser mit langwierigen mathematischen Ableitungen zu belasten, die Ideen aufzuzeigen, die zum Verständnis des Stoffes notwendig sind. Weiters wird der Leser durch zahlreiche Literaturzitate auch an die neuere Literatur auf diesem Gebiet herangeführt. So wird der zweiten Auflage dieses Werkes sicher der gleiche Erfolg beschieden sein wie der ersten.

E. Bukovics, Wien

Communication, Organization and Science. Von *J. Rothstein*, Vorwort von *C. A. Muses*. Mit 4 Textabb., XCVI, 110 S. Indian Hills, Colorado: The Falcon's Wing Press. 1958. Geb. \$ 3.50.

Das Buch ist im Stile des exakten Naturwissenschaftlers geschrieben, knapp und präzise unter Vermeidung von allzuviel Mathematik, es setzt aber Vertrautheit mit den theoretischen Grundgedanken der Physik und der Mathematik sowie ein wenig der Kybernetik (Regeltechnik) und Informationstheorie (communication-theory nach Hartley, Wiener u. a.) voraus. Es wird zwar jeder mit Mathematik und Physik Vertraute das Buch mit Spannung und Gewinn lesen, doch wird erst derjenige die Autoren als Kinder ihrer Zeit mit ihrem Anliegen voll verstehen, der den Hintergrund der atemberaubenden Entwicklung in der modernen Technik etwas kennt: Automation und das beginnende Atomzeitalter lassen neue technische Fächer entstehen wie die Regeltechnik, die Informationstechnik, sie treiben die Physik voran und zeitigen ferngelenkte Raketen, digitale und Analog-Rechenanlagen und führen zum Ausbau großer, industrieller Organisationen mit elektronischen Datenverarbeitungsmaschinen an Stelle menschlicher Routinearbeit. Die Anliegen der Autoren sind somit ernst zu nehmende Bemühungen von Physikern um neue Wege auch für ihre praktische Entwicklungsarbeit.

Die Gedankengänge beider Autoren sind faszinierend und enthalten eine derartige Fülle von Anregungen und Ideen, daß es den Rahmen einer Buchbesprechung sprengen würde, wollte man auf Einzelheiten eingehen. Die grundlegende Leistung der Verfasser liegt in dem Versuche, die vormarschierenden Fronten der Physik zu einer Synthese zu führen, eine einheitliche Theorienbildung anzuregen und ihre Schlagkraft auch in weltanschaulicher Hinsicht zu fördern. Heute

erscheinen dem gewohnten Denken die exakten Naturwissenschaften in beängstigendem Vormarsch und man wird beim Lesen des Buches unwillkürlich an die Zeiten Keplers erinnert, der den Gestirnen ihre Seelen nahm und die quantifizierende Beschreibung durch mathematische Gesetze an ihre Stelle setzte. Wir ahnen, was seine Zeitgenossen empfunden haben müssen, als er ihnen sagte: „Ohne mathematische Beweise bin ich blind.“

Angesichts der Erfolge von Physik und Technik stehen die meisten Naturwissenschaftler auf dem Boden des Positivismus und stoßen mit neuen Beobachtungs- und Meßmethoden immer weiter vor. Auf dem Boden des Positivismus stehen auch unsere beiden Autoren, die ähnlich wie Kepler zu einer Revision der üblichen Anschauungswelt treiben. Darin aber liegt die Spannung, die uns das Buch vermittelt.

Wir folgen Rothstein und lernen in Systemen denken, wir akzeptieren, daß die Entropie der Informationstheorie als ein Maß des Nicht-Wissens sich als eine Verallgemeinerung des Entropiekonzeptes der statistischen Mechanik auffassen läßt, ebenso jede Theorie als eine Organisation unserer Beobachtung und als ein System für die Voraussage von Ereignissen, ja schließlich jede Geschicklichkeit als Organisation und Besitz eines Systems. Wir erinnern uns vielleicht der „Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation“ (je genauer wir den Ort einer Korpuskel messen wollen, desto kurzwelligere Strahlung brauchen wir, aber desto größer wird dadurch die Impulsänderung der Korpuskel durch die Meßstrahlung) und verstehen, daß es meßbare Zusammenhänge zwischen erhaltbarer Information, Entropie und Organisation (erfaßbarer Beziehung der Elemente untereinander) geben muß.

Es mag noch angehen, wenn wir angesichts bereits gebauter und arbeitender elektronischer Übersetzungsautomaten (Der Referent) die Systembetrachtungen mit Logistik und Mathematik auch auf die Sprache angewendet sehen, dort aber, wo es um zweckvolle Verhalten von Lebewesen und um Sinnfragen geht, wird man zwar Roboter dem Leben nachbauen können, man wird jedoch nicht mehr dem Autor zustimmen können, erst recht nicht, wenn die gleiche extreme naturwissenschaftliche Betrachtungsweise sogar auf die Religion ausgedehnt wird. Ausgerüstet etwa mit dem Wissen über die „Haltungsgefüge“, wie sie A. Gehlen in seinem Buche „Der Mensch“ schon 1940 gab, wird man einer Betrachtung der Religion als einer ordnenden Theorie nicht ganz verständnislos gegenüberstehen, vor allem was den methodologischen Sinn eines solchen Ansatzes betrifft, man wird aber ebenso überzeugt sein, daß derartige Versuche am Wesen der Religion ganz vorbei-gehen.

Zurückhaltender und besonnener ist demgegenüber die Haltung, die C. A. Muses in dem mindestens ebenso interessanten, 85 Seiten umfassenden Vorwort bezieht. Er hätte mit seiner „Chronotopologie“ ruhig ein Buch für sich füllen können: Ein geschlossener Aufbau der Zahlenlehre von der Bewegung her, die dimensionale Bedeutung des Imaginären, die direkte Ableitung der Cauchy-Riemannschen Gleichungen, die Wellennatur der Zeit und ihre 5 Dimensionen. Es eröffnen sich eine Fülle neuer Perspektiven, die jeden Physiker und Mathematiker mitreißen dürften. Wieviel von dem Gebotenen jedoch unmittelbar konstruktiv in die weitere Theorienbildung der Physik und unserer Anschauungen eingehen wird, das bleibt den führenden Köpfen der führenden Physiker vorbehalten und das wird weiter die Zukunft zu zeigen haben.

N. Thumb, Wien

Elasticity, Fracture and Flow with Engineering and Geological Applications. Von J. C. Jaeger. Mit 54 Textabb., VIII, 152 S. London: Methuen & Co. Ltd. — New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1956. 10s. 6d.

In sehr klarer, leicht verständlicher Weise entwickelt der Verfasser zunächst in allen Einzelheiten die Gleichungen des Spannungs- und Verzerrungszustandes im Kontinuum. Daran schließt er die Spannungsdehnungsgesetze für den vollkommen elastischen Körper (mit Anisotropie), für die zähe Flüssigkeit und für den plastischen Körper. Die verschiedenen Bruch- und Fließhypothesen einschließlich geologischer Theorien werden ausführlich behandelt. Dann folgt der Übergang zu Werkstoffen mit zusammengesetzten Eigenschaften und eine Besprechung der heute üblichen Modelle (Hooke, Newton, St-Venant, Kelvin-Voigt, Maxwell, Bingham). Im letzten Abschnitt werden die Gleichungen der Bewegung und des Gleichgewichtes aufgestellt und eine Reihe spezieller Probleme gelöst. Das unterschiedliche Verhalten der einzelnen Werkstofftypen wird am Beispiel der elastischen Wellenausbreitung, der Strömung einer zähen Flüssigkeit und der ebenen Plastizität vorgeführt. Überall sind Voraussetzungen und Annahmen klar herausgearbeitet.

Das bescheiden aussehende Büchlein vermittelt in ansprechender Form eine Fülle wertvollen Wissensgutes. Man freut sich, es uneingeschränkt empfehlen zu können, nicht nur dem Studierenden, in dessen Hand es in erster Linie gehört, sondern jedem, der sich über die Grundlagen des Gebietes zuverlässig und dem heutigen Stand entsprechend unterrichten will.

H. Parkus, Wien

Wasserstrahlpumpen zur Förderung von Flüssigkeiten. Von *F. Schulz* und *K. H. Fasol*. Mit 60 Textabb., VI, 75 S. Wien: Springer-Verlag. 1958. S 90.—, DM 15.—, \$ 3.55, sfr. 15.40.

Das vorliegende Buch bringt eingehende Untersuchungen über Ejektoren. Anschließend an theoretische Überlegungen werden Versuchseinrichtungen für Luft und für Wasser eingehend und klar beschrieben. Die zweite Hälfte des Buches ist den Versuchsergebnissen vorbehalten, bei denen man sehr ausführlich die Verhältnisse von Strahlapparaten mit verschiedenen Düsen kennenlernt.

Da Ejektoren in der Industrie viel Verwendung finden, ist eine solche eingehende Forschung, deren Ergebnisse in diesem Buch niedergelegt sind, sehr zu begrüßen. Klare Entwicklung und sehr sorgfältige Durchführung der Versuche sind für diese Untersuchungen kennzeichnend, deren Resultate für alle Interessenten als sehr wertvoll bezeichnet werden müssen.

R. Bruniak, Wien

Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Von *R. Sauer*. Zweite erweiterte Auflage. Mit 68 Abbildungen. XVI, 284 S. (Grundlehren d. math. Wissenschaften: Band 62.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 38.— Ganzl. DM 41.—.

Gegenüber der ersten 1952 erschienenen Auflage wurde außer kleinen Verbesserungen und Erweiterungen (Differentialgleichungen vom gemischten Typus) vor allem ein Kapitel über den Distributionskalkül neu hinzugefügt, der sich in den letzten Jahren als so wertvolles Instrument auch für die Anwendungen erwiesen hat; als Beispiel werden Tragflügel behandelt. Weiter wird auch die Laplace-Transformation, auf Distributionen erweitert, gebracht. — Die klare, stets auf die Anwendungen ausgerichtete Darstellung wird auch der zweiten Auflage des Buches die Beliebtheit sichern, die schon der ersten Auflage zuteil wurde.

H. Hornich, Wien

Lineare Algebra. Von *W. Graeb*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 97.) Mit 7 Textabbildungen, XI, 219 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 35.70, geb. DM 39.—.

Das traditionelle Anliegen der linearen Algebra ist die Auflösung linearer Gleichungssysteme und auf diese Aufgabe sind die meisten Bücher über lineare Algebra ausgerichtet. Soweit sich die genannten Werke einer geometrischen Sprache bedienen, setzen sie im allgemeinen den dreidimensionalen, euklidischen Raum als anschaulich gegeben voraus und bauen darauf weiter auf.

Nun ist der euklidische Raum bereits ein hochspezialisiertes Gebilde und es mußte interessant scheinen, den Aufbau der linearen Algebra von einem ausschließlich geometrischen Standpunkt ab initio verfolgen zu können. Der Verfasser beschreitet diesen Weg und führt dem Leser in klarer Gliederung vor Augen, wie sich aus dem axiomatisch eingeführten Raum durch Hinzunahme des Umgebungsbegriffes, der Orientierung, der Metrik spezielle Gebilde ergeben und weist deren besondere Eigenschaften nach.

Reizvoll ist dabei die Tatsache, daß der Leser in der Lage ist, mit einem Blick zu überschauen, welche Voraussetzungen wirklich eingehen, etwa bei der Auflösung linearer Gleichungen, der affinen Klassifikation der Kegelschnitte oder dem Beweis der Formeln von Cayley-Hamilton.

Nach dem Gesagten wird dieses Werk vor allem jene Leser gewinnen, die, gewohnt an abstrakte Gedankengänge, und vertraut mit der einen oder anderen praktischen Anwendung der linearen Algebra, auch die inneren Zusammenhänge zu erkennen wünschen.

W. Knödel, Wien

Stromrichter. Von *R. Lappe*. Mit 207 vielfach mehrteiligen Diagrammen und Abbildungen. 391 S. Berlin: Verlag Technik. — Stuttgart: Berliner Union. 1958. Geb. DM 42.—.

Die Bedeutung dieses Buches liegt darin, daß es sich bemüht, einen Überblick über den derzeitigen Stand der wissenschaftlichen Grundlagen der Stromrichtertechnik zu bringen. Es handelt sich dabei um ein sehr weit gestecktes Ziel: Stromrichtertechnik ist heute eine Kombinations-technik, die nur teilweise die landläufigen Elemente der allgemeinen Elektrotechnik verwendet, größtenteils aber auf besonderen physikalischen Effekten beruhende Stromrichterventile, eigene Schaltkreise und gleichfalls sehr spezifische Steuersysteme verwendet. Daraus ergibt sich nach verschiedenen Richtungen eine starke Abweichung von der üblichen Elektrotechnik und die Notwendigkeit eines Vertrautseins mit Teilgebieten der Physik, die dem Starkstromtechniker sonst ferne liegen.

Der Aufbau und die Gliederung des Buches tragen dieser schwierigen Aufgabe im Prinzip gut Rechnung. Wir finden im ersten Teil einen Abschnitt über Entladungsphysik von Gasen und Dämpfen, einen Abschnitt über die Stromleitung in Halbleitern und auch einige Hinweise

über Kontakt- und Schaltprobleme mechanischer Stromrichterschaltssysteme. In Teil III sind die Vorgänge in Gleichrichterkreisen mit ihrer geometrischen Spannungs- und Strombildung bei verschiedenen Schaltungen behandelt; Regelung durch Gittersteuerung, Wechselrichtung und Umrichtung sind dort angeschlossen. Im gleichen Teil finden sich als Abschlußkapitel „Geräte zur Steuerung der Entladungsventile“, „Magnetische Verstärker“, und schließlich „Messungen an Stromrichtersystemen“. Im Teil II sind, hinausgehend über den gestellten Rahmen, eine Reihe moderner Ventilsysteme mit kennzeichnenden konstruktiven Einzelheiten wiedergegeben.

Stromrichtertechnik spielt bei der immer größeren Umfang annehmenden Automatisierung sowohl einzelner Produktionsgänge als auch ganzer Produktionsketten eine entscheidende Rolle. Die für solche Zwecke besonders geeigneten speziellen Schaltungen und Kombinationen erscheinen daher im heutigen Zeitpunkt von besonderem Interesse. In diesem Belange aber entspricht die Auswahl der gebrachten Details nicht ganz der Programmstellung. Dies erkennt man schon aus der Platzzuweisung an die einzelnen Probleme: Gas- und Dampfentladungsphysik nehmen rund 25% des Buches ein, während der Halbleiterphysik etwa 9% zugewiesen sind. Sowohl dem Weltumsatz nach als auch dem internationalen Publikationsvolumen nach dürfte aber das Verhältnis zwischen Gasentladungs- und Halbleiterventilen umgekehrt liegen. Den Strom- und Spannungsverhältnissen von Stromrichtern sind 15% gewidmet, die ausschließlich Gleichrichtung behandeln, während der für die Verwendung bei Automatisierungen entscheidenden Steuerungen alles in allem nur 8% gelassen wurden.

Auch in der im Vordergrund stehenden Gas- und Dampfentladungsphysik wird das Verhältnis zwischen den gebrachten Details den Praktiker nicht durchwegs befriedigen. Während nämlich die Grundlagen (Gaskinetik, Ionisierungsprozesse, Glimmentladung usw.) mit der Gründlichkeit eines physikalischen Handbuches gebracht werden, sind Lichtbogenfragen weniger begünstigt. Die für den Ventilbetrieb maßgebenden Übergänge zwischen Stromführen und Sperren sind kaum angedeutet; der Einfluß der Vorionisation, der die Betriebssicherheit von allen Leistungsgleichrichtern entscheidet, ist gar nicht aufgezeigt.

Das im Anhang gebrachte Literaturverzeichnis zeigt das Material, auf welchem das Buch aufgebaut ist: es ist der größere Teil der neueren, internationalen Literatur, wobei russische Arbeiten eine weit größere Rolle spielen als in ähnlichen bisher zur Verfügung stehenden Werken. Abgesehen von den eingangs gemachten, vor allem den Praktiker betreffenden Einschränkungen zeugt die Auswahl und vor allem die konzentrierte Wiedergabe des Wesentlichen aus mancher langatmigen Originalarbeit von einer guten und geübten wissenschaftlichen Kritikfähigkeit des Autors. Für jedermann, der etwas Erfahrung auf dem Stromrichtergebiet besitzt, und der sich auf den eingangs genannten ausführlich behandelten Sektoren weiterbilden will, wird das Buch von dauerndem Nutzen sein, eine wertvolle Bereicherung seiner Bibliothek vorstellen und oft und gerne zu Rate gezogen werden. Die gute Sprache, die klaren instruktiven Diagramme und die saubere mathematische Behandlung werden immer willkommen sein. Als grundsätzliche Einführung aber erscheint mir das Buch nicht vorbehaltlos geeignet. Der Anfänger wird Mühe haben zu entscheiden, in welche Abschnitte er sich zu vertiefen hätte, und welche er vorerst überblättern könnte.

H. von Bertele, Wien

Moeller-Werr: Leitfaden der Elektrotechnik. Band II, Teil 3: Stromrichter, insbesondere der Starkstromtechnik. Von *E. Kübler*. Mit 131 Abbildungen. VIII, 136 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. Kart. DM 16.80, Halbl. DM 18.40.

Die elektrotechnische Fachliteratur erfährt mit dem Erscheinen dieses kurzen Büchleins einen bedeutenden Schritt nach vorwärts. Es ist ein Musterbeispiel dafür, wie bei einer Einführung in ein wichtiges technisches Spezialgebiet das allenthalben bedrückende Mengenproblem des Stoffes durch subjektive Auswahl durch einen mit dem Gebiete wirklich Vertrauten gemeistert werden kann. Stromrichtertechnik weicht in vieler Hinsicht von dem Vorstellungskreise der üblichen Elektrotechnik ab und erfordert das Operieren mit zahlreichen Sonderbegriffen; diese werden dem Leser von Küblers Buch in angenehmer und anschaulicher Weise beigebracht.

Die Beschränkung, der das Buch seine Bedeutung verdankt, bezieht sich aber nicht nur auf die Problemwahl und die Ausdrucksweise, sondern auch auf den mathematischen Apparat. Andere, einen ähnlich weiten Rahmen umspannende Stromrichterbücher schwelgen gerne in formalen Ableitungen, die weitgehend kombinatorische Varianten einiger weniger trigonometrischer Zusammenhänge vorstellen. Durch konsequente Vermeidung dieser Gepflogenheit ist der von Formeln eingenommene Raum erstaunlich zusammengeschrumpft. Trotzdem erlaubt das gebrachte Material die quantitative Behandlung aller von einem Stromrichter-Anlageprojektanten erwarteten Kalkulationen.

Aus diesen Vorzügen heraus wird Prof. Küblers Buch sicherlich weite Verbreitung finden. Für eine nächste Auflage würde ich folgende kleine Modifikationen empfehlen, um den Inhalt überall auf der letzten Höhe zu halten: (a) In § 1,2 die Entwicklung dampfstrahlenfreier Quecksilber-

dampfventile aufzunehmen und dafür die veralteten Mehranodengroßgleichrichter zu kürzen; bei der Beschreibung der Ventilwirkung die Angabe von 600°C als Kathodentemperatur wegzulassen, da nach den neuesten Erkenntnissen dieser Wert zu hoch ist, und die Hg-Temperatur überhaupt für die Wirkungsweise irrelevant ist; schließlich bei der Angabe des den Wirkungsgrad bestimmenden Spannungsabfalles die bei modernen Einanodengefäßen zwischen 10 und 20 V erhaltenen Werte an Stelle der angegebenen 20...30 V zu setzen. (b) In § 2,1 der Einphasen-Vollwegschaltung und der Strombildung ohne vollkommene Glättung kurze Abschnitte zu widmen, da dies das Arbeitsprinzip der modernen Stromrichterlokomotiven geworden ist. (c) In § 2,7 den didaktisch wichtigen, praktisch aber nicht mehr verwendeten „Minus-Kollektor“ zu kürzen, dafür aber die vor kurzem von SSW/Erlangen entwickelte Transistor-Impuls-Steuerung aufzunehmen, da diese für die Verwendung in automatischen Systemen außerordentlich versprechend erscheint. (d) In § 2,2 auf das Auftreten von Schaltschwingungen (parasitären Oberwellen) im Zusammenhang mit der Spannungsbildung bei Gittersteuerung hinzuweisen. Diese Verbesserungswünsche sollen aber in keiner Hinsicht als Beeinträchtigung von Kühlers Buch angesehen werden. Die eingangs hervorgehobene sprachliche, mathematische und vor allem stoffmäßige Beschränkung machen das Buch zu einem Meisterwerk, und man kann sich nur wünschen, daß möglichst viele andere Teilgebiete der angewandten Physik und Technologie in ähnlicher Weise dem Nichtspezialisten erschlossen würden.

H. von Bertele, Wien

Rohrhydraulik. Ein Handbuch zur praktischen Strömungsberechnung. Von H. Richter. Dritte, überprüfte und ergänzte Auflage. Mit 222 Abbildungen, 69 Zahlentafeln, 36 praktischen Berechnungsaufgaben und einer Druckverlusttafel. XIII, 354 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 37.50.

Das Handbuch von H. Richter zur praktischen Strömungsberechnung liegt nunmehr in dritter Auflage vor. Daß innerhalb der letzten vier Jahre eine Neuauflage notwendig wurde, zeugt von der Notwendigkeit und auch dem Wert des Buches.

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen gebracht, im zweiten werden ausführlich theoretische Überlegungen und Versuchserfahrungen entwickelt und im dritten werden Rohrleitungen allgemein und für spezielle Fälle praktisch berechnet.

Wegen der überaus praktischen Bedeutung der Rohrströmung ist die Literatur auf diesem Gebiet sowohl in theoretischer wie auch in experimenteller Hinsicht sehr groß und der Verfasser hat sich der dankenswerten Aufgabe unterzogen, dieses verstreute Material zusammenzutragen und in übersichtlicher, klarer Form darzustellen. Reichhaltiger Inhalt, sehr gute, klare Darstellung und zahlreiche Literaturhinweise machen das Werk zum ausgezeichneten Handbuch für Rohrhydraulik.

R. Bruniak, Wien

Höhere Technische Mechanik. Nach Vorlesungen. Von I. Szabó. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 414 Abbildungen, XII, 498 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 31.50.

Ebenso wie beim ersten Band — der „Einführung“ — folgt auch hier der ersten Auflage schon innerhalb ganz kurzer Zeit die zweite, ein Zeichen für die Beliebtheit des Buches. Die Änderungen bestehen vor allem in der Aufnahme eines Anhanges, der eine Reihe vermischter Aufgaben aus der Elastizitätstheorie und Strömungslehre enthält.

Den zahlreichen Besprechungen der ersten Auflage ist nicht viel hinzuzufügen. Der Verfasser versucht, in den beiden Büchern praktisch die gesamte Mechanik (starre Körper, Elastomechanik, Plastizitätstheorie und Strömungslehre inkompressibler und kompressibler Medien) darzustellen. Daß bei der Verarbeitung eines derart umfangreichen Stoffes gewisse Flüchtigkeiten nicht zu vermeiden sind, ist selbstverständlich. Einige dieser dem Besprecher aufgefallenen Unschärfen sind nachstehend angeführt. Auf Seite 11 wird nicht klar, was δE und δU gegenüber E und U physikalisch bedeuten sollen. Auf Seite 93 wird der Begriff Stabilität zu eng gefaßt im Vergleich zu der auf Seite 10 gegebenen allgemeineren Kleinschen Definition. Was auf Seite 106 nach dem Wort Rezept kommt, ist wohl überflüssig. Auf Seite 138 müßte betont werden, daß die Gleichungen des ebenen Spannungszustandes im Gegensatz zu denen des ebenen Verzerrungszustandes nur näherungsweise gelten. Auf Seite 379 wird das ideale Gas als eine spezielle ideale Flüssigkeit bezeichnet; es müßte demnach reibungsfrei sein! Auf Seite 382 wird die Zustandsgleichung als eine Beziehung zwischen Druck und Dichte (ohne Temperatur!) eingeführt. Auf Seite 383 erscheint der Begriff innere Energie, ohne daß er definiert wird. Auf Seite 408 wird die Grundannahme der Grenzsichttheorie, daß ihr nämlich der Druck von der freien Strömung aufgeprägt wird, nicht erwähnt. Die Begriffe adiabatisch und isentropisch werden als gleichbedeutend dargestellt. Der Titel „Theorie des Verdichtungsstoßes nach Riemann“ für die auf den Seiten 446 und 447 gebrachten Überlegungen ist wohl kaum zutreffend.

H. Parkus, Wien

Aircraft and Missile Propulsion. Vol. I: Thermodynamics of Fluid Flow and Application to Propulsion Engines. Von *M. J. Zucrow*. XIV, 538 S. New York: John Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1958. \$ 11.50.

Dieses Buch ist der erste Band eines dreibändig geplanten Werkes, das für Studierende gedacht ist sowie für Ingenieure, die sich mit dem Gebiet der Strahlantriebe vertraut machen wollen. Ein solches Werk benötigt eine nicht zu kurze Einführung in die Grundlagen der Gasdynamik, da nur auf diese Weise ein tieferes Eindringen in das Gebiet möglich ist. Vorliegendes Buch ist eine solche Einführung. Es werden darin Teile der Gasdynamik behandelt, die grundlegend für die Theorie der Strahlantriebe sind, wie z. B. stationäre Fadenströmung, Rohrströmung mit Reibung und Energiezufuhr, Verdichtungsstoß usw. Anwendungen werden an zahlreichen, gut gewählten Beispielen demonstriert. Ferner werden Eigenschaften und Wirkungsweisen verschiedener Strahlantriebe, wie Turbinenstrahlantrieb, Turboprop, Lorin-Antrieb, Schmidt-Argusrohr und Rakete kurz besprochen. Ihre ausführliche Theorie ist dem zweiten bzw. dritten Band vorbehalten.

Leider wird bei der Behandlung der Grundlagen der Gasdynamik fast gar nicht die ebene und rotationssymmetrische Strömung berücksichtigt, sondern praktisch allein die eindimensionale Fadenströmung. Nicht behandelt wird die Prandtl-Meyersche Düsenströmung, und auch auf die Charakteristikenverfahren bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung wird nicht eingegangen. Ferner ist auffällig, daß kein vollständiges Stoßpolarendiagramm (zumindest für Luft) vorhanden ist, sondern die Eigenschaften des schrägen Verdichtungsstoßes an Hand von Diagrammen gezeigt werden, wie sie vor Einführung der Stoßpolaren üblich waren, und die für die Anwendungen nicht sehr geeignet sind.

Bei der Besprechung der Stoßfrontdicke fällt auf, daß die grundlegenden Arbeiten von L. Prandtl¹ und von R. Becker² nicht erwähnt werden, sondern andere Arbeiten aus dem Jahre 1945.

Weiters ist recht störend, daß dort, wo der Name Oswatitsch auftreten soll (Seite 420, 421, 422, 423 und 428) Ostwatitsch steht, und daß auf Seite 378 statt Ackeret, Ackerett steht! Namen wie Oswatitsch und Ackeret sind in der englischen Literatur doch wohl nicht ganz unbekannt.

Schließlich wäre es vorteilhaft gewesen, auch Arbeitsmedien, deren Zustandsgleichung von der des idealen Gases erheblich abweicht, in größerem Umfang zu erwähnen (expandierender Wasserdampf wird in Beispielen kurz gestreift, wenngleich er auch in einigen Fällen durch ein ideales Gas approximiert wird), und Verfahren zur Bestimmung der Strömungszustände derartiger Medien anzugeben, da die Düsenströmung bei heutigen Raketenmotoren wegen des Auftretens der thermischen Dissoziation nicht mehr als Strömung eines idealen Gases angesehen werden kann. Die Benützung von Entropiediagrammen ist hier sehr vorteilhaft.

Das Buch kann aber durchaus empfohlen werden, da es im deutschen Sprachgebiet anscheinend bisher nicht möglich war, etwas Gleichartiges herauszubringen. Das, was hier bisher zur Einführung in die Raketenflugtechnik und in die Theorie der Strahlantriebe erschienen ist, erreicht zum Großteil auch nicht annähernd das Niveau des vorliegenden Buches. Dem Erscheinen des angekündigten zweiten und dritten Bandes kann mit Interesse entgegengesehen werden.

W. Peschka, Wien

Grenzschichtforschung — Boundary Layer Research. Symposium Freiburg/Br. 26. bis 29. August 1957. Herausgegeben von *H. Görtler*. Mit 206 Abbildungen, XII, 411 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 67.50.

Die Internationale Union für Theoretische und Angewandte Mechanik (IUTAM) veranstaltete im Jahr 1957 in Freiburg/Br. ein Symposium über Grenzschichtforschung, um Wissenschaftlern der ganzen Welt, die sich besonders mit diesem Forschungsgebiet beschäftigen bzw. es durch ihre Arbeiten hervorragend gefördert haben, die Möglichkeit zu geben, sich über die Grundlagenforschung und den gegenwärtigen Stand auf diesem nicht nur interessanten, sondern auch, wie sich immer mehr zeigt, überaus wichtigen Gebiet auszusprechen. Die bei dieser Tagung, an der ausgewählte Gelehrte aus siebzehn Staaten teilnahmen, gehaltenen Vorträge und Diskussionsveranstaltungen liegen nun in Buchform, herausgegeben vom Vorsitzenden H. Görtler, vor.

Es ist klar, daß bei einer Zusammenkunft der ersten Fachleute auf einem Wissensgebiet nur — wenn auch ausgezeichnete — Referate gehalten werden und es bleibt die Frage, ob es wertvoll ist, solche Referate, die sich auf ausführlichere Arbeiten beziehen, einem weiteren Leserkreis in Buchform zu übergeben. Wenn man das Buch durchsieht, kann man diese Frage nur bejahen. Jedem Leser, der sich irgendwie mit Grenzschichtfragen beschäftigt, wird hier der letzte Stand dieses Forschungsgebietes bekanntgemacht und er lernt nicht nur die Probleme, sondern auch ihre Bear-

¹ L. Prandtl: Zur Theorie des Verdichtungsstoßes. Z. ges. Turbinenwes. III, S. 241 (1906).

² R. Becker: Stoßwelle und Detonation. Z. f. Physik VIII, S. 321—362 (1922).

beitung kennen. Hand in Hand gehen Theorie und Experiment, was immer noch für die Strömungslehre von größtem Nutzen war. Das Buch wird für jeden Interessenten auch fernerhin ein Nachschlagewerk sein, das ihm für seine eigenen Arbeiten sehr förderlich sein kann.

R. Bruniak, Wien

Ordinary Differential Equation. Von *W. Kaplan*. (Series in System Engineering.) XV, 534 S. Reading (Mass.): Addison-Wesley Publ. Co. 1958. \$ 8.50.

Das Gebiet der Differentialgleichungen ist für den Ingenieur von besonderer Bedeutung. Viele der von ihm bearbeiteten Probleme führen auf solche Gleichungen und er muß, will er sie mit Erfolg lösen, imstande sein, die verschiedenen Methoden zur exakten oder zur angenäherten Lösung anzuwenden. Es gibt zwar eine große Zahl von Einführungen in dieses Gebiet. Aber sie sind mit wenigen Ausnahmen entweder vom Standpunkt des Mathematikers geschrieben und entwickeln die Gedankengänge, ohne auf die Denkweise des Ingenieurs Rücksicht zu nehmen, oder sie bedienen sich oft nicht exakter Schlußweisen und bleiben mitunter noch im rein Formalen der elementar integrierbaren Fälle stehen, ohne auf tieferliegende Fragen einzugehen. Nur wenige Darstellungen finden hier den richtigen Mittelweg und sind damit imstande, dem Ingenieur einen ihn ansprechenden Zugang zu den Differentialgleichungen zu geben. Das vorliegende Werk ist unbedingt zu diesen zu zählen. Es stellt eine besonders schöne Synthese zwischen den verschiedenen Forderungen dar: Ohne die Forderung des Mathematikers nach Strenge der Beweisführung zu umgehen, wird eine sehr weitgehende Einführung gegeben, die in leicht verständlicher, anschaulicher, durch ausgezeichnete Abbildungen unterstützter Form, die in Darstellung und Auswahl der Beispiele den Bedürfnissen des Ingenieurs besonders entgegenkommt, geboten wird.

Daß der Verfasser trotzdem nicht im Formalen stecken bleibt, sondern auch tiefergehende Fragen behandelt, zeigt das folgende Stichwortverzeichnis des Inhalts: Grundbegriffe, Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, lineare Differentialgleichungen und Systeme von solchen, Anwendung der Matrizenrechnung auf die Lösung linearer Differentialgleichungssysteme, exakte Differentialgleichungen, Differentialgleichungen höheren Grades, Lösung von Differentialgleichungen (insbesondere auch von schwachsingulären Differentialgleichungen) durch Reihenentwicklung, numerische Methoden, Verfahren der Phasenebene (Singuläre Punkte, Indextheorem, Stabilität), Existenzsätze.

Daneben seien noch als für den modernen Ingenieur wichtige Fragestellungen und Hilfsmittel die Anwendung der Operatorenrechnung und die ausführliche Behandlung der für den Elektrotechniker und für den Regelungstechniker unentbehrlichen — aber in den meisten Darstellungen über Differentialgleichungen fehlenden — Untersuchungen über das Übertragungsverhalten von durch Differentialgleichungen beschriebenen linearen und nichtlinearen Übertragungsgliedern erwähnt. Besonders interessant sind auch die Entwicklungen über die an Poincaré anknüpfenden Untersuchungen bei nichtlinearen Differentialgleichungen. Die zahlreichen Anwendungsbeispiele sind sowohl den verschiedenen Teilgebieten der Physik als auch anderen Zweigen der Naturwissenschaften, insbesondere der Chemie und Biologie entnommen. Nicht nur der Ingenieur, sondern auch der Mathematiker wird diese Einführung mit großem Gewinn verwenden können.

E. Bukovics, Wien

Berichte

X. Internationaler Kongreß für angewandte Mechanik

Der X. Internationale Kongreß für angewandte Mechanik wird in der Zeit vom 31. August bis 7. September 1960 im Kongreßgebäude in Stresa (Italien) abgehalten. Vortragssprachen sind: Englisch, Französisch, Deutsch und Italienisch.

Vortragsanmeldungen sind an das Sekretariat des Internationalen Komitees (Prof. Mekelweg 2, Delft, Holland) vor dem 1. Januar 1960 einzusenden. Der Anmeldung ist ein Vortragsauszug (möglichst nicht mehr als zwei Maschinschreibseiten) in vierfacher Ausfertigung beizuschließen. Das Komitee wird über die Auswahl der zum Vortrag zugelassenen Arbeiten entscheiden. Die Entscheidung ist nicht anfechtbar.

Auskünfte über Unterbringung, Anmeldeformulare zur Teilnahme usw. sind beim Sekretär des italienischen Organisationskomitees, Herrn Dr. Rolla, erhältlich. Anschrift: Consiglio Nazionale delle Ricerche, Ufficio relazioni internazionali, Piazza delle Scienza 7, Roma.

Soeben erschien:

Die Gaserzeuger

Von

Dipl.-Ing. Kurt Schmidt

Oberingenieur i. R. der Klöckner-Humboldt-Deutz A. G.
Köln-Deutz

Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 52 Textabbildungen. VI, 51 Seiten. 4°. 1959

(Band 1, Teil 2 der Sammlung „Die Verbrennungskraftmaschine“,
herausgegeben von Prof. Dr. Hans List, Graz)

Steif geheftet S 90.—, DM 15.—, sfr. 15.40, \$ 3.55

Trotz des Aufstieges der Ölwirtschaft behalten feste Brennstoffe als Energieträger für Kraft- und Kraft-Wärme-Anlagen Bedeutung. Ihre Vergasung in Gaserzeugern (Generatoren) ist geboten, um den günstigen thermodynamischen Wirkungsgrad der Verbrennungskraftmaschinen, zumal im Gebiet kleinerer und mittlerer Leistungen, auch in Verbindung mit industriellen Heizanlagen auszunutzen. Die Generatoren müssen in Bauart, Größeneinheiten und Arbeitsweise dem zur Verfügung stehenden Brennstoff (Kohlen, Briketts, Koks, Torf, Holz, Pflanzenabfälle) und im erzeugten Gas nach Heizwert und „Motorreinheit“ und in leichter, weitgehend selbsttätiger Leistungsanpassung den Motoren entsprechen. Die völlig neubearbeitete zweite Auflage dieses Heftes beschreibt die wichtigsten für Gasmotorenbetrieb geeigneten Gaserzeuger mit den Aufbereitungs- (Kühl- und Reinigungs-) Anlagen. Es gibt auch vergleichende Hinweise auf Generator- und andere Kraftgase sowie deren Erzeugung in Schmelzwerken, Kokereien, Klärgasanlagen.

Inhaltsverzeichnis:

Gas als motorischer Kraftstoff. — Die Gaserzeugung aus festen Brennstoffen (Die Entgasung, Die Vergasung, Wichtige Gaserzeuger-Bauarten für Gasmotoren, Fortleitung des Gases). — Betriebsverhalten der Gaserzeuger. — Wahl der Gaserzeugergröße.

Die Talsperren Österreichs

Schriftenreihe

Herausgegeben von der Österreichischen Staubeckenkommission und dem
Österreichischen Wasserwirtschaftsverband Wien

Schriftleitung: Prof. Dr. Hermann Grengg

Zuletzt erschienen:

- Heft 6: **Meßeinrichtungen und Messungen an der Gewölbesperre Dobra.** Von Dr. Ing. Hans Petzny. Mit 35 Textabbildungen. 50 Seiten. Gr.-8°. 1957. Rotaprint.
Steif geheftet S 36.—, DM 6.—, sfr 6.10, \$ 1.45.
- Heft 7: **Limbergssperre, statistische Auswertung der Pendelmessungen.** Von Dozent Dipl.-Ing. Dr. techn. Erwin Tremmel. Mit 9 Abbildungen und 8 Tafeln. 29 Seiten. Gr.-8°. 1958. Rotaprint.
Steif geheftet S 30.—, DM 5.—, sfr 5.10, \$ 1.20.
- Heft 8: **Zur Formgebung und Berechnung der Bogenlamellen von Gewölbemauern.** Von Dr. techn. Dipl.-Ing. Roland Kettner. Mit 14 Abbildungen und 34 Tafeln. 99 Seiten. Gr.-8°. 1959. Rotaprint.
Steif geheftet S 54.—, DM 9.—, sfr 9.20, \$ 2.15.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Soeben erschien:

Instationäre Wärmespannungen

Von

Heinz Parkus

o. Prof. an der Technischen Hochschule in Wien

Mit 34 Textabbildungen. V, 166 Seiten. Gr.-8°. 1959

Ganzleinen S 228.—, DM 38.—, sfr. 38.90, \$ 9.05

Die „Instationären Wärmespannungen“ bilden die Fortsetzung und gleichzeitig den Abschluß einer systematischen und umfassenden Darstellung der Theorie der Wärmespannungen, die mit dem Buch von *Melan* und *Parkus* „Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder“ begonnen wurde. In diesem Buche werden die Wärmespannungen nichtstationärer Temperaturfelder unter Berücksichtigung sowohl der vollkommen elastischen als auch der viskoelastischen und der elastisch-plastischen Körper behandelt. Es sind damit die theoretischen Grundlagen von Vorgängen zusammengefaßt, die auf vielen Gebieten der Technik heute eine wichtige Rolle spielen, vor allem überall dort, wo Maschinen- oder Bauteile hohen Temperaturbeanspruchungen ausgesetzt sind, wie etwa im Reaktorbau, Flugzeugbau, Raketenbau usw.

Inhaltsverzeichnis: Einige allgemeine Sätze der Thermoelastizität. Die Grundgleichungen. Formänderungsenergie und *d'Alembertsches* Prinzip. *Hamiltonsches* Prinzip. Minimum der potentiellen Energie. Ergänzungsenergie. Eindeutigkeit der Lösung. Volumsänderung. Das thermisch-elastische Verschiebungspotential. Die *Greensche* Funktion. Die quasistatische Behandlung instationärer elastischer Wärmespannungen. — **Anheiz- und Abkühlvorgänge.** Momentanquelle im unendlichen Körper. Momentaner Dipol im unendlichen Körper. Momentanquelle an der Oberfläche des Halbraumes. Oberfläche wärmeisoliert. Momentaner Dipol an der Oberfläche des Halbraumes. Oberfläche auf konstanter Temperatur. Halbraum mit plötzlicher Erwärmung der Oberfläche. Unendlicher Körper mit kugeligem Hohlraum. Voll- und Hohlzylinder mit Kreisquerschnitt. Erster und zweiter Lösungsanteil. Plötzliche Erwärmung eines Zylinders. Auf einem Teil seiner Mantelfläche erwärmter langer Zylinder. Auf der gesamten Mantelfläche erwärmter langer Hohlzylinder. In Umfangsrichtung ungleichmäßig erwärmter langer Zylinder. Wärmespannungen in der Kugel. Im Mittelpunkt erhitzte Scheibe. — **Periodische Temperaturänderungen.** Allgemeines. Halbraum mit periodisch veränderlicher Oberflächentemperatur. Periodische Wärmequelle im unendlichen Körper. Periodische Linien und Flächenquellen. — **Bewegte Wärmequellen.** Allgemeines. Bewegte Punktquelle an der Oberfläche des Halbraumes und einer dünnen Scheibe. Rotierendes Temperaturfeld. — **Dynamische Einflüsse.** Allgemeines. Wärmeschock an der Oberfläche des Halbraumes. Wärmeschock mit endlichem Temperaturgradienten. Momentanquelle im unendlichen Körper. Unendlicher Körper mit kugeligem Hohlraum. Periodische Temperaturänderungen. Periodische Wärmequelle im unendlichen Körper. Im Mittelpunkt erhitzte Scheibe. Wärmeschock an der Oberfläche des langen Vollzylinders. Thermisch erregte Plattenschwingungen. Wärmeschock an der Oberfläche einer Platte. — **Wärmespannungen bei viskoelastischem Verhalten des Werkstoffes.** Einleitung. Die Spannungs-Verzerrungs-Gleichungen. Elastisch-viskoelastische Analogie. Das thermisch-viskoelastische Verschiebungspotential. Stationäre und quasistationäre Temperaturfelder. Halbraum mit periodischer Oberflächentemperatur. Unendlicher Körper mit kugeligem Hohlraum. — **Wärmespannungen bei elastisch-plastischem Verhalten des Werkstoffes.** Fließbedingung und Spannungs-Verzerrungs-Gleichungen. Elastisch-plastische Kugel. Dickwandiges Rohr. Im Mittelpunkt erhitzte Scheibe. Gebogene Platte. — **Literatur- und Sachverzeichnis.**

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung